II. Vibración libre de un sistema de un grado de libertad

Objetivos:

1. Definir que es vibración libre.
2. Recordar el método de diagrama de cuerpo libre para deducir las ecuaciones de movimiento.
3. Introducir el método de conservación de energía para deducir las ecuaciones de movimiento en sistemas no amortiguados.
4. Estudiar la vibración libre de sistemas de un grado de libertad en traslación y en rotación tanto cuando no hay amortiguamiento como cuando existe amortiguamiento viscoso o bien amortiguamiento de Coulomb.

1. Método del diagrama de cuerpo libre

La segunda ley de Newton es aplicada a diagramas de cuerpo libre de sistemas vibratorios para derivar la ecuación diferencial de movimiento.

Los siguientes pasos pueden ser empleados cuando se tienen sistemas de un grado de libertad:

- Se selecciona una coordenada generalizada. Esta variable puede representar el desplazamiento de una partícula en el sistema. Sí hay movimiento rotatorio, esta coordenada generalizada puede representar un desplazamiento angular.
- Los diagramas de cuerpo libre son dibujados mostrando un instante arbitrario de tiempo. Al dibujarse se muestran todas las fuerzas externas efectivas actuando sobre el sistema.
- Se aplica la forma apropiada de la segunda ley del Newton al diagrama de cuerpo libre del sistema.

II. Vibración libre de un sistema de un grado de libertad

1. Método del diagrama de cuerpo libre

Partículas:

$$\boxed{\sum \vec{F} = m\ddot{\vec{r}}}$$

$$\boxed{\dot{\vec{H}}_o = \sum \vec{M}_o = I\ddot{\theta}}$$

Cuerpos rígidos:

$$\boxed{\sum \vec{F} = m\ddot{\bar{\vec{r}}}}$$

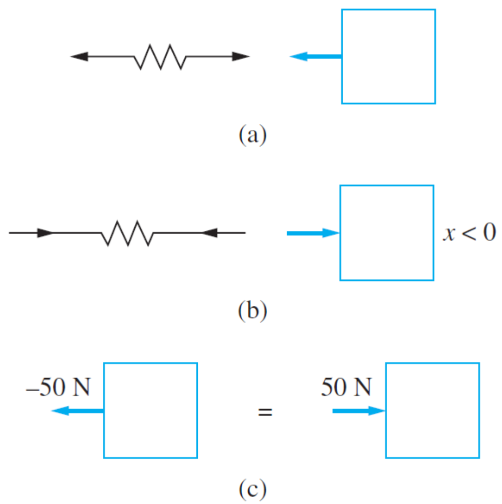
$$\boxed{\dot{\vec{H}}_o = \sum \vec{M}_o = \bar{\vec{r}} \times m\ddot{\bar{\vec{r}}} + \vec{H}_G}$$

$$\vec{H}_G = \int_m \vec{r}_G \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_G)dm$$

- Se aplican las diferentes suposiciones realizadas en conjunto con diferentes manipulaciones algebraicas para obtener la ecuación diferencial que gobierna el movimiento. Típicamente estas suposiciones buscan linealizar la ecuación diferencial.

Observaciones:

- La fuerza desde el resorte en el diagrama del cuerpo libre es igual y en dirección opuesta (tercera ley de Newton) a la fuerza que aplica el cuerpo sobre el resorte.

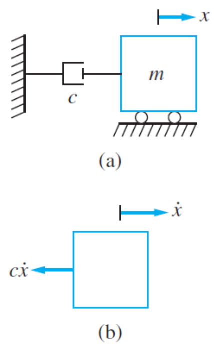


II. Vibración libre de un sistema de un grado de libertad

1. Método del diagrama de cuerpo libre

Observaciones:

- La fuerza desde un amortiguador viscoso o de Coulomb siempre se opone a la dirección del movimiento del cuerpo.

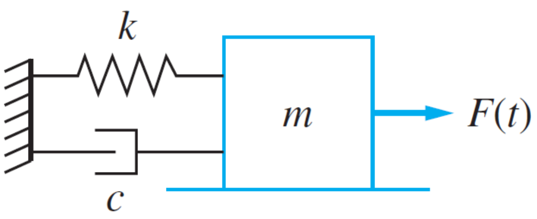


(a)

(b)

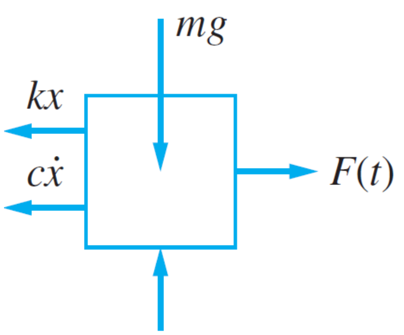
<u>Ejemplo</u>

Considere el bloque mostrado a continuación, como una masa puntual con un solo grado de libertad, que se desliza en la dirección de la fuerza aplicada sobre una superficie con fricción despreciable. Derive la ecuación diferencial que gobierna al movimiento. Suponga hay amortiguamiento viscoso y elasticidad lineal.



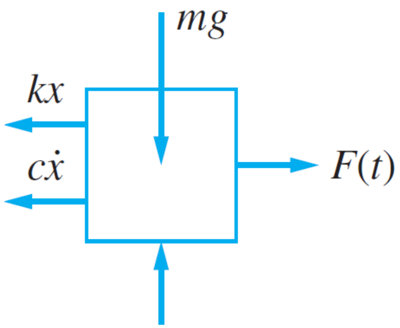
Paso 1. Se selecciona una coordenada generalizada. Se considerará que el desplazamiento $x(t)$ en dirección de $F(t)$ será la coordenada generalizada a emplear.

Paso 2. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la masa puntual m en un instante de tiempo arbitrario mostrando todas las fuerzas externas.



II. Vibración libre de un sistema de un grado de libertad

1. Método del diagrama de cuerpo libre



Paso 3. Se aplica la forma apropiada de la segunda ley del Newton al diagrama de cuerpo libre del sistema. El sistema está en traslación por lo tanto

$$\sum \vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$$

$$-kx - c\dot{x} + F = m\ddot{x}$$

Paso 4. Se aplican las diferentes suposiciones realizadas en conjunto con diferentes manipulaciones algebraicas para obtener la ecuación diferencial que gobierna el movimiento.

$$\boxed{m\ddot{x} + kx + c\dot{x} = F}$$

Aquí se requiere de $x(0)$ y de $\dot{x}(0)$ para resolver la ecuación diferencial.

2. Método del principio de conservación de energía para sistemas conservativos

En el caso de sistemas en donde no están presentes fuerzas no conservativas (incluyendo la disipación de energía producto de amortiguadores) se puede emplear el principio de conservación de energía.

$$E.C. + E.P. = cnst$$

$$\boxed{\frac{d(E.C. + E.P.)}{dt} = 0}$$

Considerando nuevamente el ejemplo anterior, si $c = F(t) = 0$

Se tendrá que:

$$E.P. = \frac{1}{2}kx^2 \qquad E.C. = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

II. Vibración libre de un sistema de un grado de libertad

2. Método del principio de conservación de energía para sistemas conservativos

Entonces:

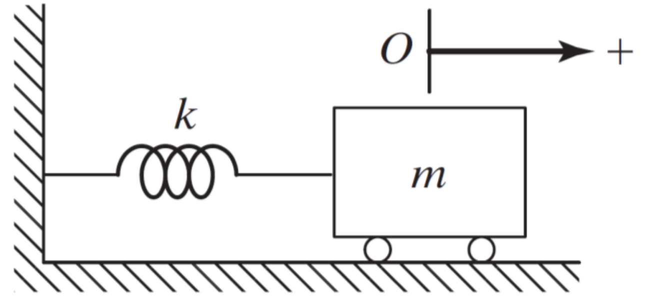
$$\frac{d(E.C.+E.P.)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) = 0$$

$$\frac{2}{2}kx\dot{x} + \frac{2}{2}m\dot{x}\ddot{x} = 0$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

3. Introducción a los sistemas de un grado de libertad en vibración libre

Un sistema en vibración libre es aquel que oscila bajo una perturbación inicial sin que actúen fuerza externas posteriormente. Aquellos sistemas en vibración libre que solo requieren de una coordenada generalizada se conocen como sistemas de un grado de libertad en vibración libre.



4. Vibración libre de un sistema en traslación no amortiguado

El sistema de la figura anterior consiste de una masa puntual sujeta a traslación pura sin amortiguamiento y con un solo grado de libertad, por lo tanto como se dedujo a partir de método de energía la ecuación diferencial que rige al movimiento es la siguiente:

$$\boxed{m\ddot{x} + kx = 0}$$

<u>Deflexiones estáticas y gravedad</u>

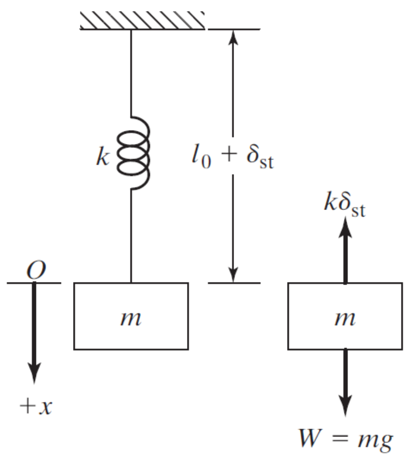
Las deflexiones estáticas están presentes en un resorte producto de una fuente de energía potencial inicial, usualmente la gravedad.

II. Vibración libre de un sistema de un grado de libertad

4. Vibración libre de un sistema en traslación no amortiguado

<u>Deflexiones estáticas y gravedad</u>

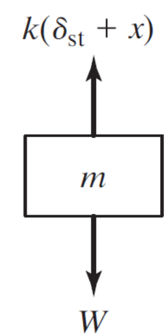
La fuerza estática desarrollada en los resortes forma una condición de equilibrio con la fuerza de gravedad.



Del equilibrio estático se encuentra que

$$W = k\delta_{st}$$

Una vez el resorte es inicialmente perturbado, el diagrama de cuerpo libre resultante sería



Y la resultante ecuación de movimiento

$$\sum \vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$$

$$-k(x + \delta_{st}) + W = m\ddot{x}$$

$$-k(x + \delta_{st}) + k\delta_{st} = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

II. Vibración libre de un sistema de un grado de libertad

4. Vibración libre de un sistema en traslación no amortiguado

Deflexiones estáticas y gravedad

Lo anterior también puede ser deducido por medio del método de conservación de energía.

$$E.P. = \left[\frac{1}{2}kx^2 + mgx\right] - mgx = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E.C. = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Entonces

$$\frac{d(E.C. + E.P.)}{dt} = m\ddot{x} + kx = 0$$

Solución de la ecuación diferencial

Suponiendo $x(t) = Ce^{st}$, donde C y s son constantes por determinar, al sustituir en la ecuación diferencial se tiene

$$Ce^{st}(ms^2 + k) = 0$$

Por lo tanto

$$ms^2 + k = 0$$

$$s_{1,2} = \pm\left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} i = \pm i\omega_n$$

Donde $\omega_n = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$ representa la frecuencia natural del sistema.

Consecuentemente la solución general puede ser expresada como:

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_n t} + C_2 e^{-i\omega_n t}$$

Recordando la identidad de Euler

$$e^{\pm i\omega_n t} = \cos\omega_n t \pm i\sin\omega_n t$$

La expresión anterior podría re escribirse como

$$x(t) = A_1\cos\omega_n t + A_2\sin\omega_n t$$

Aquí A_1, A_2 y C_1, C_2 son constantes que dependen de las condiciones iniciales.

II. Vibración libre de un sistema de un grado de libertad

4. Vibración libre de un sistema en traslación no amortiguado

<u>Solución de la ecuación diferencial</u>

Imponiendo dichas condiciones:

$$x(0) = A_1 = x_0$$

$$\dot{x}(0) = A_2\omega_n = \dot{x}_0$$

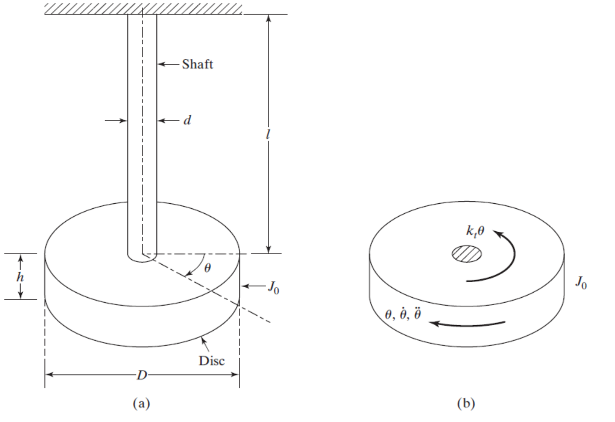
Entonces

$$\boxed{x(t) = x_0 \cos\omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\sin\omega_n t}$$

5. Vibración libre de un sistema torsional no amortiguado

Sí un cuerpo rígido oscila en torno a un eje de referencia, el movimiento resultante es llamado vibración torsional. Aquí el desplazamiento del cuerpo es medido en términos de una coordenada angular.

Considere el siguiente caso



Aquí disco está sujeto a un eje flexible con las propiedades geométricas mostradas en la figura. Dicho sistema es analizado como si solo tuviera un grado de libertad bajo vibración torsional no amortiguada.

Aquí el eje se considera que es un resorte sometido a torsión con una constante k_t. Las propiedades geométricas y del material del eje pueden ser empleadas para definir dicha constante. La inercia del disco sólido con respecto a su centro de masa $\bar{I}$ se define como J_0.

II. Vibración libre de un sistema de un grado de libertad

5. Vibración libre de un sistema torsional no amortiguado

Considerando que el sistema equivalente (b) consiste de un disco sujeto a torsión que gira en torno a su centro de masa (punto 0) a partir de la segunda ley de Newton se tendrá:

$$\sum \vec{M}_0 = \bar{I}\ddot{\theta}$$

$$-k_t\theta = J_0\ddot{\theta}$$

$$\boxed{J_0\ddot{\theta} + k_t\theta = 0}$$

Donde k_t varía dependiendo del tipo de sección transversal del eje. Suponiendo se trate de un eje circular de diámetro d de mecánica de materiales se tiene que

$$k_t = \frac{\pi G d^4}{32l}$$

Donde G es el modulo de rigidez al cortante y l la longitud del eje.

$$\bar{I} = J_0 = \int_m (x^2 + y^2)\,dm$$

$$J_0 = \int_A (x^2 + y^2)\rho h\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^r (r^2)\rho h\,(r dr d\theta)$$

$$J_0 = \rho h\frac{2\pi r^4}{4} = \rho h\frac{\pi d^4}{32}$$

Aquí ρ es la densidad del disco, y h su espesor.

<u>Solución</u>

La solución de esta ecuación diferencial, al igual que el caso de un sistema con traslación, sería

$$\theta(t) = A_1\cos\omega_n t + A_2\sin\omega_n t$$

Donde $\omega_n = \left(\frac{k_t}{J_0}\right)^{1/2}$

II. Vibración libre de un sistema de un grado de libertad

5. Vibración libre de un sistema torsional no amortiguado

Solución

Aplicando las condiciones de frontera

$$\theta(0) = A_1 = \theta_0$$

$$\dot{\theta}(0) = A_2\omega_n = \dot{\theta}_0$$

Entonces

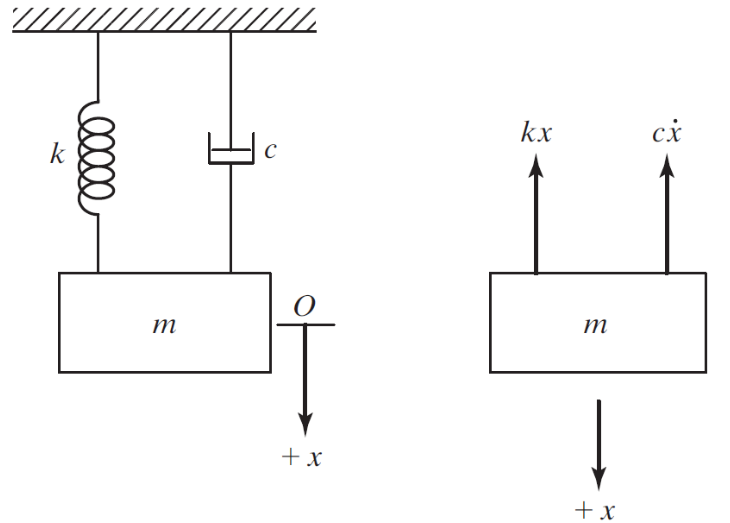
$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos\omega_n t + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_n}\sin\omega_n t}$$

6. Vibración libre con amortiguamiento viscoso

Ecuación de movimiento de un sistema en traslación

Como se pudo ver previamente la ecuación de movimiento para un sistema de un grado de libertad en traslación pura con amortiguamiento viscoso estaría dada por

$$m\ddot{x} + kx + c\dot{x} = F$$



Sí se tiene que la vibración es libre $F = 0$, y consecuentemente

$$\boxed{m\ddot{x} + kx + c\dot{x} = 0}$$

II. Vibración libre de un sistema de un grado de libertad

6. Vibración libre con amortiguamiento viscoso

Solución de la ecuación de movimiento de un sistema en traslación

Suponiendo $x(t) = Ce^{st}$, donde C y s son constantes por determinar, al sustituir en la ecuación diferencial se tiene

$$Ce^{st}(ms^2 + cs + k) = 0$$

Por lo tanto

$$ms^2 + cs + k = 0$$

$$\boxed{s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}}$$

Consecuentemente la solución general puede ser expresada como

$$\boxed{x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}}$$

Constante de amortiguamiento crítico y relación de amortiguamiento

El amortiguamiento crítico c_c se define como el valor de la constante de amortiguamiento c con el cuál el radical de $s_{1,2}$ se vuelve cero.

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0$$

$$c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n$$

Definiendo la relación de amortiguamiento $\zeta = c/c_c$

$$\frac{c}{2m} = \left(\frac{c}{c_c}\right)\left(\frac{c_c}{2m}\right) = \zeta\omega_n$$

Entonces

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{(\zeta\omega_n)^2 - {\omega_n}^2}$$

$$\boxed{s_{1,2} = \omega_n\left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)}$$

II. Vibración libre de un sistema de un grado de libertad

6. Vibración libre con amortiguamiento viscoso

Solución de la ecuación de movimiento de un sistema en traslación

Se puede pensar entonces que el comportamiento de los sistemas amortiguados depende del valor de la relación de amortiguamiento.

-Caso 1: $\zeta = 0$, sistemas no amortiguados. Este caso lleva a vibraciones no amortiguadas y solo se da cuando $c = 0$.

-Caso 2: $\zeta < 1$, sistemas subamortiguados. Para esta condición $\zeta^2 - 1 < 0$ y se tienen raíces negativas.

$$s_{1,2} = \omega_n \left(-\zeta \pm i\sqrt{1-\zeta^2}\right)$$

$$x(t) = C_1 e^{\omega_n\left(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2}\right)t} + C_2 e^{\omega_n\left(-\zeta - i\sqrt{1-\zeta^2}\right)t}$$

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[C_1 e^{i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t} + C_2 e^{-i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t}\right]$$

Recordando la identidad de Euler

$$e^{\pm i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t} = \cos\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t \pm i\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t$$

La expresión anterior podría re escribirse como

$$\boxed{x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[A_1\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)t + A_2\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)t\right]}$$

Donde A_1 y A_2 dependen de las condiciones iniciales.

En la expresión anterior $\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ suele denotar lo que se conoce como la frecuencia de vibración amortiguada (ω_d).

- Caso 3: $\zeta = 1$, sistemas críticamente amortiguados.

$$s_{1,2} = -\omega_n = -\frac{c_c}{2m}$$

$$\boxed{x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega_n t}}$$

II. Vibración libre de un sistema de un grado de libertad

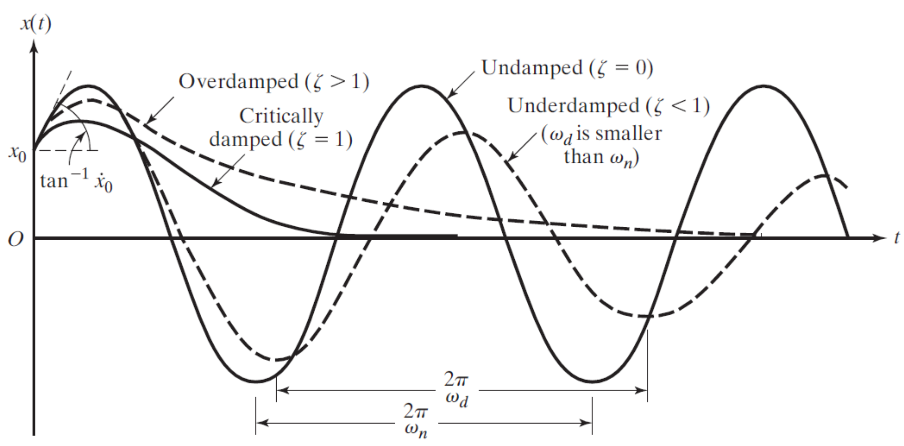
6. Vibración libre con amortiguamiento viscoso

Solución de la ecuación de movimiento de un sistema en traslación

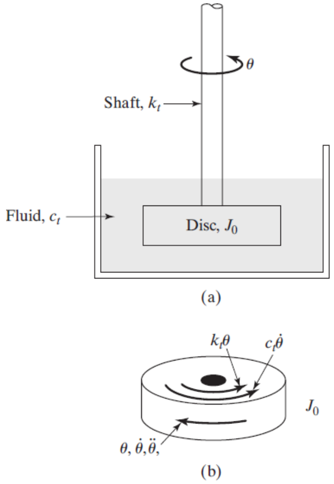
- Caso 4: $\zeta > 1$, sistemas sobre amortiguados. Aquí se tiene que ambas raíces son reales y distintas.

$$s_{1,2} = \omega_n\left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$$

$$\boxed{x(t) = C_1 e^{\omega_n\left(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)t} + C_2 e^{\omega_n\left(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)t}}$$



Ecuación de movimiento de un sistema torsional



El torque T, producto del amortiguamiento viscoso está dado por

$$T = c_t\dot{\theta}$$

Donde c_t es la constante de amortiguamiento torsional y $\dot{\theta}$ la velocidad angular.

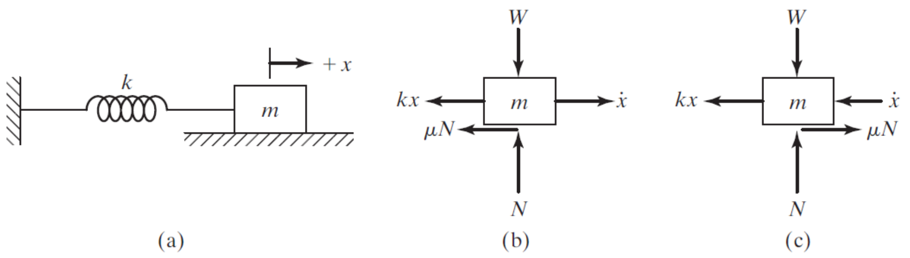
II. Vibración libre de un sistema de un grado de libertad

7. Vibración libre con amortiguamiento de Coulomb

El valor del coeficiente de fricción depende de los materiales en contacto y de las condiciones de contacto. Esta fuerza de fricción actúa en dirección opuesta a la dirección de la velocidad.

El amortiguamiento de Coulomb a veces es llamado amortiguamiento constante, ya que es independiente del desplazamiento y de la velocidad.

<u>Ecuación de movimiento de sistemas en traslación</u>



- Caso 1 (b): Cuando x es positiva o negativa pero $\dot{x}$ es positiva, la fuerza de amortiguamiento iría en la misma dirección que la fuerza del resorte.

$$\boxed{m\ddot{x} + kx = -\mu N}$$

La cual es una ecuación de segundo orden, no homogénea, cuya solución es de la forma

$$\boxed{x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t - \frac{\mu N}{k}}$$

Donde A_1, A_2 dependen de las condiciones iniciales del semiciclo, y $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$

-Caso 2 (c): Cuando x es positiva o negativa, pero $\dot{x}$ es negativa la fuerza de amortiguamiento iría en dirección opuesta a la fuerza del resorte.

$$\boxed{m\ddot{x} + kx = \mu N}$$

$$\boxed{x(t) = A_3 \cos \omega_n t + A_4 \sin \omega_n t + \frac{\mu N}{k}}$$

Donde A_3, A_4 dependen de las condiciones iniciales del semiciclo, y $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$

II. Vibración libre de un sistema de un grado de libertad

7. Vibración libre con amortiguamiento de Coulomb

Solución

Podría considerarse ambos casos si se define la función signum, sgm, cuyo valor es 1 cuando el argumento toma valores mayores que cero, y -1 cuando toma valores menores que cero.

$$m\ddot{x} + kx + \mu N \mathrm{sgm}(\dot{x}) = 0$$

Esta es una ecuación no lineal cuya solución analítica simple no existe.

Sin embargo, se puede encontrar una solución sí se divide el eje del tiempo en segmentos separados por $\dot{x} = 0$, es decir en intervalos con diferentes direcciones de movimiento.

Para más detalles vea la sección 2.9.2 de su libro de texto.

Ecuación de movimiento de sistemas torsionales

Sí un par de torsión de fricción constante T, actúa en un sistema torsional, la ecuación que rige las oscilaciones angulares de sistema se deriva de forma similar a las ecuaciones del sistema en traslación.

- Caso 1: Cuando θ es positiva o negativa, pero $\dot{\theta}$ es positiva.

$$\boxed{J_0\ddot{\theta} + k_t\theta = -T}$$

La cual es una ecuación de segundo orden, no homogénea, cuya solución es de la forma

$$\boxed{\theta(t) = A_1 \cos\omega_n t + A_2 \sin\omega_n t - \frac{T}{k_t}}$$

-Caso 2: Cuando θ es positiva o negativa, pero $\dot{\theta}$ es negativa.

$$\boxed{J_0\ddot{\theta} + k_t\theta = T}$$

$$\boxed{\theta(t) = A_3 \cos\omega_n t + A_4 \sin\omega_n t + \frac{T}{k_t}}$$

Donde A_1, A_2, A_3, A_4 dependen de las condiciones iniciales del semiciclo, y $\omega_n = \sqrt{\frac{k_t}{J_0}}$