# Laboratorio 8
# Transformada de Laplace

**Objetivos**
- Ilustrar y examinar los conceptos desarrollados en clases relativos a la transformada de Laplace.
- Explorar y analizar las propiedades de la transformada de Laplace y su aplicación al análisis de sistemas LTI causales.
- Utilizar una herramienta de simulación y análisis para confirmar algunos conceptos importantes sobre la transformada de Laplace y su uso para el análisis de señales y sistemas de tiempo continuo.

**Experiencias**
Desarrolle los siguientes problemas propuestos en forma clara y ordenada. Para el desarrollo de los mismos debe aplicar los conocimientos adquiridos durante las sesiones de clase del curso. No todos los puntos o preguntas en los problemas se pueden solucionar directamente con el software. En algunos casos deberá desarrollar parcial o totalmente algunos puntos en forma analítica antes de implementar alguna aplicación en el programa.

***En general, resuelva los problemas en forma analítica y verifique usando Octave, excepto en los casos que se indica otra cosa***.

**P01. (solo analítico)**
Para cada una de las siguientes integrales, especifique los valores del parámetro real σ que asegure que la integral converge:
a) $\int_0^{\infty} e^{-5t} e^{-(\sigma+j\omega)t} dt$
b) $\int_{-5}^{5} e^{-5t} e^{-(\sigma+j\omega)t} dt$
c) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-5|t|} e^{-(\sigma+j\omega)t} dt$

**P02.**
Sea la señal $x(t) = e^{-5t}u(t-1)$,
a) Determine la transformada de Laplace usando la definición y especifique la región de convergencia.
b) Verifique su respuesta usando Octave.
c) Determine los valores de los números finitos A y t0 tales que la transformada de Laplace G(s) de $g(t) = Ae^{-5t}u(-t-t_0)$ tiene la misma forma algebraica que X(s). ¿Cuál es la región de convergencia correspondiente a G(s)?

**P03. (solo analítico)**
Considere la señal $x(t) = e^{-5t}u(t) + e^{-\beta t}u(t)$,

a) Determine la transformada de Laplace, X(s).
b) ¿Cuáles son las restricciones impuestas sobre las partes real e imaginaria de β si la región de convergencia de X(s) es Re{s}> –3?

**P04.**
Para la transformada de Laplace de

$$x(t) = \begin{cases} e^{t} \sin 2t\,, & t \leq 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases}$$

Indique la localización de sus polos y su región de convergencia.

**P05. (solo analítico)**
Para cada una de las siguientes expresiones algebraicas para la transformada de Laplace de una señal, grafique el diagrama de polos y ceros e indique el número de polos y ceros localizados en el infinito. Adicionalmente, grafique el diagrama de polos y ceros usando Octave.

a) $\frac{s+1}{s^2-1}$
b) $\frac{s^3-1}{s^2+s+1}$

**P06.**
Determine la función del tiempo x(t), para cada una de las siguientes transformadas de Laplace y sus regiones de convergencia asociadas. Verifique su respuesta con el software si es posible.

a) $\frac{1}{s^2+9},\ Re\{s\} > 0$
b) $\frac{s}{s^2+9},\ Re\{s\} < 0$
c) $\frac{s^2-s+1}{(s+1)^2},\ Re\{s\} > -1$

**P07. (solo analítico)**
Dado que

$$e^{-at}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+a}, \qquad Re\{s\} > Re\{-a\}$$

determine la transformada inversa de Laplace de

$$X(s) = \frac{2(s+2)}{s^2+7s+12}, \qquad Re\{s\} > -3$$

**P08. (solo analítico)**
Considere dos señales derechas x(t) y y(t) relacionadas a través de las ecuaciones diferenciales

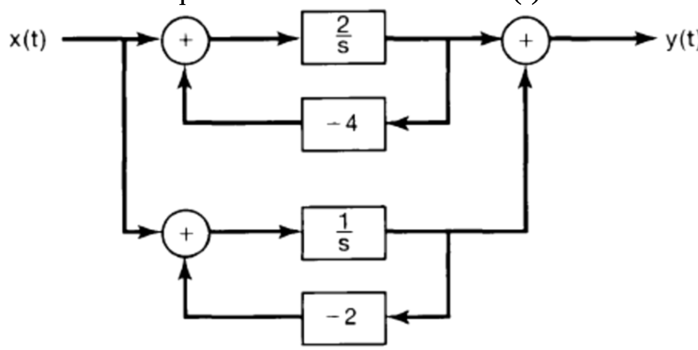
$$\frac{dx(t)}{dt} = -2y(t) + \delta(t)$$

y

$$\frac{dy(t)}{dt} = 2x(t)$$

Determine Y(s) y X(s), junto con sus regiones de convergencia.

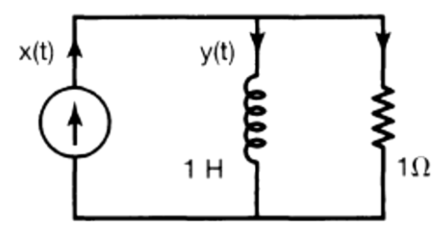
**P09. (solo analítico)**
Un sistema LTI causal S tiene la representación en diagrama de bloques mostrada en la figura. Determine una ecuación diferencial que relaciones la entrada x(t) con la salida y(t).




**P10.**
Determine la transformada unilateral de Laplace de cada una de las siguientes señales, y especifique las regiones de convergencia correspondientes:

a) $x(t) = e^{-2t}u(t+1)$
b) $x(t) = \delta(t+1) + \delta(t) + e^{-2(t+3)}u(t+1)$
c) $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-4t}u(t)$

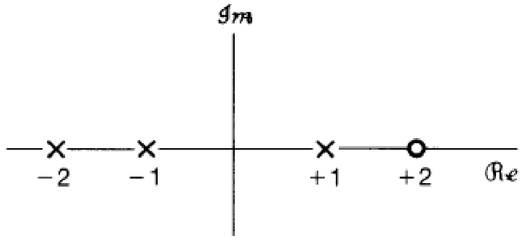
**P11.**
Considere el circuito RL mostrado en la figura, donde una fuente de corriente produce una corriente de entrada x(t), y la salida del sistema corresponde a la corriente y(t) que fluye por el inductor.




a) Determine la respuesta a entrada cero de este circuito cuando la corriente de entrada es $x(t) = e^{-2t}u(t)$. Grafique la entrada y la respuesta.
b) Determine la respuesta a entrada cero del circuito para t > $0^-$, dado que $y(0^-) = 1$. Grafique la respuesta.
c) Determine la salida del circuito cuando la corriente de entrada es $x(t) = e^{-2t}u(t)$ y la condición inicial es la misma que la especificada en la parte (b). Grafique la entrada y la salida.

**P12.**
Considere un sistema LTI para el cual la función del sistema H(s) tiene el patrón de polos y ceros mostrado en la figura.

a) Indique todas las ROC posibles que pueden estar asociadas con este patrón de polos y ceros.
b) Para cada una de las ROC identificadas en la parte (a), especifique si el sistema asociado es estable y/o causal.



**P13.**

Considere un sistema LTI con entrada $x(t) = e^{-t}u(t)$ y respuesta al impulso $h(t) = e^{-2t}u(t)$.

a) Determine las transformadas de Laplace de x(t) y h(t). Verifique su respuesta con el software.
b) Usando la propiedad de convolución, determine la transformada de Laplace Y(s) de la salida y(t).
c) De la transformada de Laplace de y(t), como se obtuvo en la parte (b), determine y(t). Verifique su respuesta con el software.
d) Verifique su resultado de la parte (b) efectuando la convolución explícita de x(t) y h(t).
e) Implemente la convolución de x(t) y h(t) en el software y grafique cada señal y la salida del sistema.
f) A partir de la función del sistema, grafique la respuesta en frecuencia de magnitud y fase del sistema.

**P14.**

Considere un sistema LTI causal de cuarto orden cuya función del sistema se especifica como

$$H(s) = \frac{1}{(s^2 - s + 1)(s^2 + 2s + 1)}$$

a) Dibuje una representación en diagrama de bloques para el sistema como una interconexión en cascada o en paralelo de dos sistemas de segundo orden, cada uno de los cuales se representa en forma directa. No debe haber multiplicaciones por coeficientes no reales en el diagrama de bloques resultante.