Laboratorio 4
La transformada de Fourier de tiempo continuo

Objetivos

- Ilustrar y examinar los conceptos desarrollados en clase relativos a la transformada de Fourier de señales de tiempo continuo.
- Explorar y analizar las propiedades de la transformada de Fourier.
- Aplicar una herramienta de simulación para confirmar algunos conceptos y propiedades importantes de la transformada de Fourier para señales de tiempo continuo y verificar sus propiedades.
- Afianzar el aprendizaje sobre la transformada de Fourier de tiempo continuo.

Experiencias

Desarrolle los siguientes problemas propuestos en forma clara y ordenada. Para el desarrollo de los mismos debe aplicar los conocimientos adquiridos durante las sesiones de clase del curso. No todos los puntos o preguntas en los problemas se pueden solucionar directamente con el software. En algunos casos deberá desarrollar parcial o totalmente algunos puntos en forma analítica antes de implementar alguna aplicación en el programa.

En general, resuelva los problemas en forma analítica y verifique usando Matlab, excepto en los casos que se indica otra cosa.

P01. Transformada de Fourier – ecuación de análisis

Use la ecuación de análisis de la transformada de Fourier para calcular la transformada de las siguientes señales, y usando Matlab, grafique su magnitud y fase.

a) $e^{-2|t-1|}$
b) $\delta(t+1)+\delta(t-1)$
c) $\frac{d}{dt}\{u(-2-t)+u(t-2)$

P02. Transformada de Fourier – señales periódicas

Determine la transformada de Fourier de las siguientes señales periódicas, y usando Matlab, grafique su magnitud.

a) $x_1(t)=\sin(2\pi t+\pi/4)$
b) $x_2(t)=1+\cos(6\pi t+\pi/8)$

P03. Transformada inversa de Fourier – ecuación de síntesis

Use la ecuación de síntesis de la transformada de Fourier para calcular la transformada inversa de Fourier de las siguientes señales, y usando Matlab, grafique la señal resultante.

a) $X_1(\omega)=2\pi\delta(\omega)+\pi\delta(\omega-4\pi)+\pi\delta(\omega+4\pi)$
b) $|X_2(\omega)|e^{j\theta}, donde\ |X_2(\omega)|=2\{u(\omega+3)-u(\omega-3)\}\ \ y\ \ \theta=-\frac{3}{2}\omega+\pi$

c) Para la solución de la parte (b), determine los valores de t para los cuales $x_2(t) = 0$.

P04. Transformada de Fourier – propiedades (solo analítico)

Dado que $x(t)$ tiene transformada de Fourier $X(\omega)$, exprese las transformadas de Fourier de las señales siguientes en términos de $X(\omega)$.

a) $x_1(t) = x(1-t) + x(-1-t)$
b) $x_2(t) = x(3t-6)\}$
c) $x_3(\mathrm{t}) = \frac{d^2}{dt^2}x(t-1)$

P05. Transformada de Fourier – Tablas de pares y propiedades (solo analítico)

a) Determine la transformada de Fourier de la señal x(t).

$$x(t) = t\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)^2$$

b) Use la relación de Parseval y el resultado anterior para determinar el valor numérico de

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)^4 dt$$

c) Calcule la transformada de Fourier de

$$[te^{-2t}\sin(4t)]u(t)$$

d) Calcule la transformada de Fourier de la siguiente señal

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k\delta(t-kT)\,, \qquad |a| < 1$$

P06. Periodicidad

Sea x(t) una señal cuya transformada de Fourier es

$$X(\omega) = \delta(\omega) + \delta(\omega-\pi) + \delta(\omega-5)$$

y sea

$$h(t) = u(t) - u(t-2)$$

a) ¿Es x(t) periódica?
b) ¿Es x(t)*h(t) periódica?
c) ¿Puede ser periódica la convolución de dos señales aperiódicas?
d) Usando Matlab, grafique x(t), h(t) y x(t)*h(t). Verifique sus respuestas anteriores.

P07. Sistema LTI

Considere un sistema LTI causal con respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = \frac{1}{j\omega + 3}$$

Para una entrada particular x(t), se observa que este sistema produce la salida

$$y(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-4t}u(t)$$

Determine x(t).

Use Matlab para graficar:

a) las magnitudes de los espectros de x(t) y y(t), así como de la respuesta en frecuencia del sistema.
b) Las señales x(t) y y(t), así como la respuesta al impulso del sistema.

P08. La convolución

Calcule la convolución de cada uno de los siguientes pares de señales x(t) y h(t) en el dominio de la frecuencia aplicando la propiedad de convolución y haciendo la transformada inversa.

a) $x(t) = te^{-2t}u(t),\ h(t) = e^{-4t}u(t)$
b) $x(t) = e^{-t}u(t),\ h(t) = e^{t}u(-t)$
c) Para el problema (a) use Matlab para graficar las señales x(t) y h(t), realice la convolución de estas dos señales y grafique el resultado. Compare con la respuesta que obtuvo en la parte (a).

P09. Traslación espectral

Suponga que x(t) tiene la transformada de Fourier X(ω), y sea p(t) una señal periódica con periodo fundamental ω_0 y representación en serie de Fourier

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{jn\omega_0 t}$$

a) Determine una expresión para la transformada de Fourier de $y(t) = x(t)p(t)$
b) Suponga que $x(t) = 20sinc(20t)$ y $p(t) = \cos(40\pi t)$. Grafique los espectros de magnitud en el dominio de *f*, de *x*(t), *p*(t) y *y*(t).
c) Suponga que $x(t) = 20sinc(20t)$ y $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\frac{1}{30})$. Grafique los espectros de magnitud en el dominio de *f*, de *x*(t), *p*(t) y *y*(t).
d) ¿Qué puede concluir de este problema?

P10. Respuesta de sistema LTI

a) Demuestre que los tres sistemas LTI con las respuestas al impulso indicadas, tienen todos la misma respuesta a *x*(*t*) = cos(*t*).

$$h_1(t) = u(t), \quad h_2(t) = -2\delta(t) + 5e^{-2t}u(t), \quad h_3(t) = 2te^{-t}u(t)$$

b) Use Matlab para graficar las respuestas de los tres sistemas a la entrada dada. ¿Se verifique su demostración?.

Este problema ilustra el hecho de que la respuesta a cos(t) no se puede usar para especificar únicamente un sistema LTI.

P11. Sistema representado por ecuaciones diferenciales (solo analítico)

La entrada y la salida de un sistema LTI causal están relacionadas por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 2x(t)$$

a) Encuentre la respuesta al impulso de este sistema.
b) ¿Cuál es la respuesta de este sistema si $x(t) = te^{-2t}u(t)$?

P12. Sistema LTI

Un sistema LTI causal y estable tiene respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = \frac{j\omega + 4}{6 - \omega^2 + j5\omega}$$

a) Determine una ecuación diferencial que relacione la entrada x(t) con la salida y(t) del sistema.
b) Determine la respuesta al impulso del sistema.
c) ¿Cuál es la salida del sistema cuando la entrada es $x(t) = e^{-4t}u(t) - te^{-4t}u(t)$?
d) Utilice Matlab para graficar las señales x(t) y h(t). Obtenga las salida y(t) aplicando la convolución en Matlab, y grafique la misma. Compare con su resultado de la parte (c).