# Laboratorio 3
# Representación de señales periódicas en series de Fourier

**Objetivos**

- Ilustrar y examinar los conceptos desarrollados en clase relativos a la representación de señales periódicas en series de Fourier.
- Explorar y analizar las propiedades de las series de Fourier.
- Comprender el concepto de filtrado y analizar algunos tipos de filtros básicos.
- Aplicar una herramienta de simulación para confirmar algunos conceptos y propiedades importantes de las series de Fourier para señales periódicas continuas y discretas y verificar sus propiedades.
- Afianzar el aprendizaje acerca de las series de Fourier.

**Experiencias**

Desarrolle los siguientes problemas propuestos en forma clara y ordenada. Para el desarrollo de los mismos debe aplicar los conocimientos adquiridos durante las sesiones de clase del curso. No todos los puntos o preguntas en los problemas se pueden solucionar directamente con el software. En algunos casos deberá desarrollar parcial o totalmente algunos puntos en forma analítica antes de poder implementar alguna aplicación en el programa.

***En general, resuelva los problemas en forma analítica y verifique usando Matlab, excepto en los casos que se indica otra cosa.***

**P01. Series trigonométricas - síntesis**

1.1 Una señal periódica continua x(t) es de valor real y tiene periodo fundamental T = 8. Los coeficientes de la serie de Fourier diferentes de cero para x(t) son: $a_1 = a_{-1} = 2$; $a_3 = a^*_{-3} = 4j$. Exprese x(t) usando la serie trigonométrica de Fourier y la serie trigonométrica compacta. Dibuje los espectros de magnitud y fase de x(t).
Grafique dos periodos de la señal x(t) usando Matlab a partir de las expresiones en serie exponencial compleja, serie trigonométrica y trigonométrica compacta. Compare los resultados.

1.2 Una señal periódica discreta x[n] es de valor real y tiene periodo fundamental N = 5. Los coeficientes de la serie de Fourier diferentes de cero para x[n] son: $a_0 = 1$; $a_1 = a^*_{-1} = e^{j\pi/4}$; $a_4 = a^*_{-4} = 2e^{j\pi/3}$. Exprese x[n] usando la serie trigonométrica de Fourier y la serie trigonométrica compacta.
Grafique dos periodos de la señal x[n] usando Matlab a partir de las expresiones en serie exponencial compleja, serie trigonométrica y trigonométrica compacta. Compare los resultados.

**P02. Series - análisis**

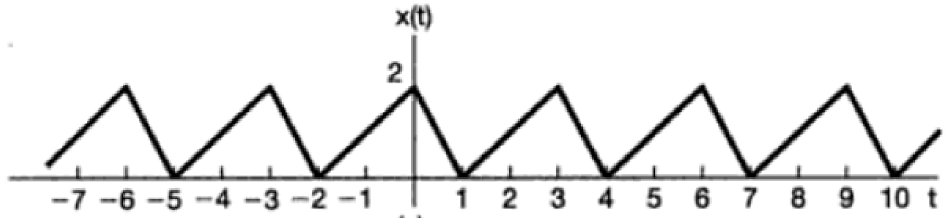
Para la señal periódica continua

$$x(t) = 2 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + 4\sin\left(\frac{5\pi}{3}t\right)$$

determine la frecuencia fundamental $\omega_0$ y los coeficientes de la serie exponencial compleja $a_k$. Grafique usando Matlab la señal x(t) a partir de la expresión dada y de la serie exponencial compleja encontrada. Compare ambos resultados.

**P03. Series – análisis y síntesis**

Determine las distintas representaciones en series de Fourier de la señal mostrada en la figura.




A partir de los resultados, grafique usando Matlab la señal en el intervalo t = [–2, 7].

**P04. Propiedades de las series de Fourier (solo en forma analítica)**

Sea $x_1(t)$ una señal periódica con una frecuencia fundamental $\omega_1$ y coeficientes de Fourier $a_k$. Dado que

$$x_2(t) = x_1(1 - t) + x_1(t - 1)$$

¿cómo se relaciona la frecuencia fundamental $\omega_2$ de $x_2(t)$ con $\omega_1$? Determine también la relación entre los coeficientes de la serie de Fourier $b_k$ de $x_2(t)$ y los coeficientes $a_k$.
Nota: Utilice las propiedades.

**P05. Periodicidad y ecuación de análisis**

Use la ecuación de análisis para evaluar los valores numéricos de un periodo de los coeficientes de la serie de Fourier de la señal periódica

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{4\delta[n - 4m] + 8\delta[n - 1 - 4m]\}$$

Use Matlab para graficar dos periodos de la señal x[n] usando la expresión anterior, y la ecuación de análisis con los coeficientes encontrados.

**P06. Sistema LTI**

Considere un sistema LTI de tiempo continuo cuya respuesta en frecuencia es

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt = \frac{\sin 4\omega}{\omega}$$

Si la entrada a este sistema es una señal periódica

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 4 \\ -1, & 4 \le t < 8 \end{cases}$$

con periodo T = 8, determine la salida correspondiente del sistema y(t).

Grafique usando Matlab la señal y(t).

**P07. Respuesta en frecuencia (solo en forma analítica)**

Cuando el tren de impulsos

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-4k]$$

Es la entrada a un sistema LTI particular con respuesta en frecuencia $H(e^{j\omega})$, se encuentra que la salida del sistema es

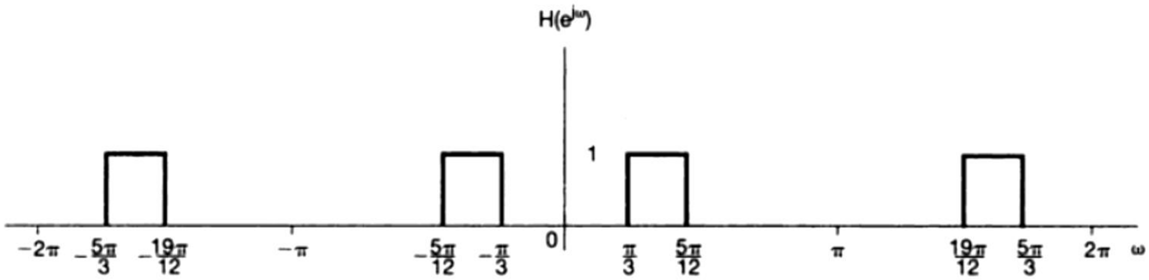
$$y[n] = \cos\left(\frac{5\pi}{2}n + \frac{\pi}{4}\right)$$

Determine los valores de $H(e^{jk\pi/2})$ para k = 0, 1, 2 y 3.

**P08. Filtrado 1**

Determine la salida del filtro mostrado en la figura para las siguientes entradas periódicas

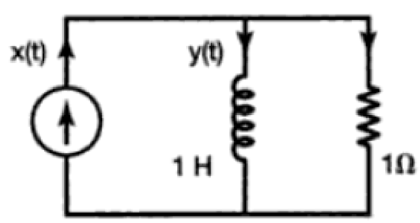
a) $x_1[n] = (-1)^n$
b) $x_2[n] = 1 + \sin\left(\frac{3\pi}{8}n + \frac{\pi}{4}\right)$
c) $x_3[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4k} u[n-4k]$




Grafique usando Matlab, dos periodos de las señales dadas, y las señales de salida correspondientes.

**P09. Filtrado 2**

Considere un sistema LTI causal como el circuito RL mostrado en la figura. Una fuente de corriente produce una corriente de entrada x(t), y la salida del sistema se considera la corriente y(t) que fluye por el inductor.




a) Encuentre la ecuación diferencial que relaciona a x(t) con y(t).
b) Determine la respuesta en frecuencia de este sistema, considerando la salida del sistema ante entradas con forma $x(t) = e^{j\omega t}$.
c) Determine la salida y(t) si x(t) = cos(t).

**P10. Propiedad de multiplicación**

Examine las tres señales discretas con periodo fundamental de 6:

$$x[n] = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{6}n\right), \qquad y[n] = \sin\left(\frac{2\pi}{6}n + \frac{\pi}{4}\right), \quad z[n] = x[n]y[n]$$

a) Determine los coeficientes de la serie de Fourier de x[n]
b) Determine los coeficientes de la serie de Fourier de y[n]
c) Utilice los resultados de las partes (a) y (b) junto con la propiedad de multiplicación de la serie discreta de Fourier para determinar los coeficientes de la serie de Fourier de z[n]
d) Determine los coeficientes de la serie de Fourier de z[n] mediante la evaluación directa y compare sus resultados con los de la parte (c).

**P11. Ortogonalidad**

Si dos funciones son ortogonales y además, la energía de cada señal es igual a 1, se dice que las funciones son ortonormales.

a) Considere las funciones $\sin(m\omega_0 t)$ y $\sin(n\omega_0 t)$ en el intervalo (0, T), donde $T = 2\pi/\omega_0$. ¿son estas funciones ortogonales? ¿son ortonormales?
b) Considere las funciones $\phi_m(t)$ y $\phi_n(t)$ en el intervalo (0, T), donde $T = 2\pi/\omega_0$ para

$$\emptyset_k(t) = \frac{1}{T}[\cos(k\omega_0 t) + \sin(k\omega_0 t)]$$

¿Son estas funciones ortogonales? ¿Son ortonormales?

c) Demuestre que las funciones

$$\emptyset_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$$

son ortogonales sobre cualquier intervalo de longitud $T = 2\pi/\omega_0$. ¿Son ortonormales?

d) Defina un valor para $\omega_0$, $m$ y $n$, y grafique en Matlab cada una de la señales y el producto de ambas en el intervalo (0,T). Verifique sus respuestas de la parte (a).
e) Defina un valor para $\omega_0$, $m$ y $n$, y grafique en Matlab cada una de la señales y el producto de ambas en el intervalo (0,T). Verifique sus respuestas de la parte (b).