La Programación Lineal

H. R. Alvarez A., Ph. D.

Aspectos generales

- Se considera a George Dantzig el padre de la P. L.
- Su objetivo es el de asignar recursos escasos a actividades que compiten por ellos.
- Técnica matemática que permite seleccionar el mejor curso de acción o programa de un conjunto de soluciones factibles.
- Los modelos que describen las relaciones son funciones lineales.

Formulación típica

- El planteamiento típico se puede suponer como:

  Optimizar alguna variable dependiente, expresada como una función lineal de n variables independientes, sujeta a una serie de restricciones lineales que son a su vez funciones de las n variables independientes.

Formulación típica

- La variable dependiente se conoce como **Función Objetivo**
- Está relacionada a menudo con conceptos económicos tales como ganancias, costos, ingresos, tiempo, distancia, etc.
- Las variables independientes son **variables de decisión**

Formulación estándar

$$\left.\begin{array}{l}\text{Optimizar:} \\ f(x) = Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j\end{array}\right\} \text{Función objetivo}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{sujeto a:} \\ g(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \le b_i \ \forall\, i = 1, 2, ..., m\end{array}\right\} \text{Restricciones}$$

Donde:

- f(.): función objetivo
- x_j : variables de decisión
- c_j : coeficiente de la j-ésima variable de
  decisión en la función objetivo
- $a_{1,j}$: coeficiente de la j-ésima variable de decisión
  en la iésima restricción
- b_i : constante o límite de la i-ésima restricción

Las restricciones:

- En general las restricciones pueden ser de tres tipos:
  - $g(x) \leq b$
  - $g(x) \geq b$, o
  - $g(x) = b$
- La restricción de tipo ≤ asegura que el uso de un recurso no exceda cierto límite
- La restricción de tipo ≥ asegura que el uso de un recurso satisfaga un mínimo establecido
- La restricción de tipo = asegura que el uso de un recurso esté limitada a una cantidad previamente establecida.

Pasos para formular el modelo

- Entender bien el problema
- Identificar las variables de decisión
- Establecer la función objetivo
- Establecer las restricciones
- Identificar los límites superior e inferior de las variables de decisión

Ejemplo

Una fábrica de ventanas produce artículos de vidrio de alta calidad, incluyendo ventanas y puertas. Tiene tres plantas. Los marcos de aluminio se producen en la planta A, los de madera se producen en la planta B y en la C se corta el vidrio y se ensamblan los productos.

Se ha decidido ampliar la producción en dos artículos adicionales: un tipo especial de puerta y una ventana de seguridad. Se ha determinado que la empresa tiene capacidad suficiente para producir estos artículos sin sacrificar la producción de los otros que tiene, aunque tendrán que competir con la capacidad excedente de la planta C. Adicionalmente se conoce que se podrá vender todo lo que se produce.

Datos del problema

Planta	Capacidad utilizada por unidad producida		Capacidad disponible
	Producto		
	Puertas	Ventanas	
A	1	0	4
B	0	2	12
C	3	2	18
Utilidad por unidad vendida	3	5	

Ejemplo …

La empresa está interesada en encontrar una mezcla óptima de puertas especiales y ventanas de seguridad a fin de tener la mayor cantidad de ingresos posible.

Formulación

- ¿Cuál es el objetivo del problema?
  - Encontrar cuantas puertas y ventanas producir a fin de maximizar la utilidad
- ¿Cuáles son las variables de decisión?
  - La cantidad de puertas (x_1) y ventanas (x_2) a producir
- ¿Cuál es la función objetivo?
  - La utilidad por ventana y puerta vendida
- ¿Cuáles son las restricciones?
  - Las capacidades de las plantas

Formulación estándar

Maximizar:

$Z = 3x_1 + 5x_2$

Sujeto a:

$$
\begin{aligned}
x_1 \qquad\qquad &\le 4 \\
2x_2 &\le 12 \\
3x_1 + 2x_2 &\le 18 \\
x_1, \qquad x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

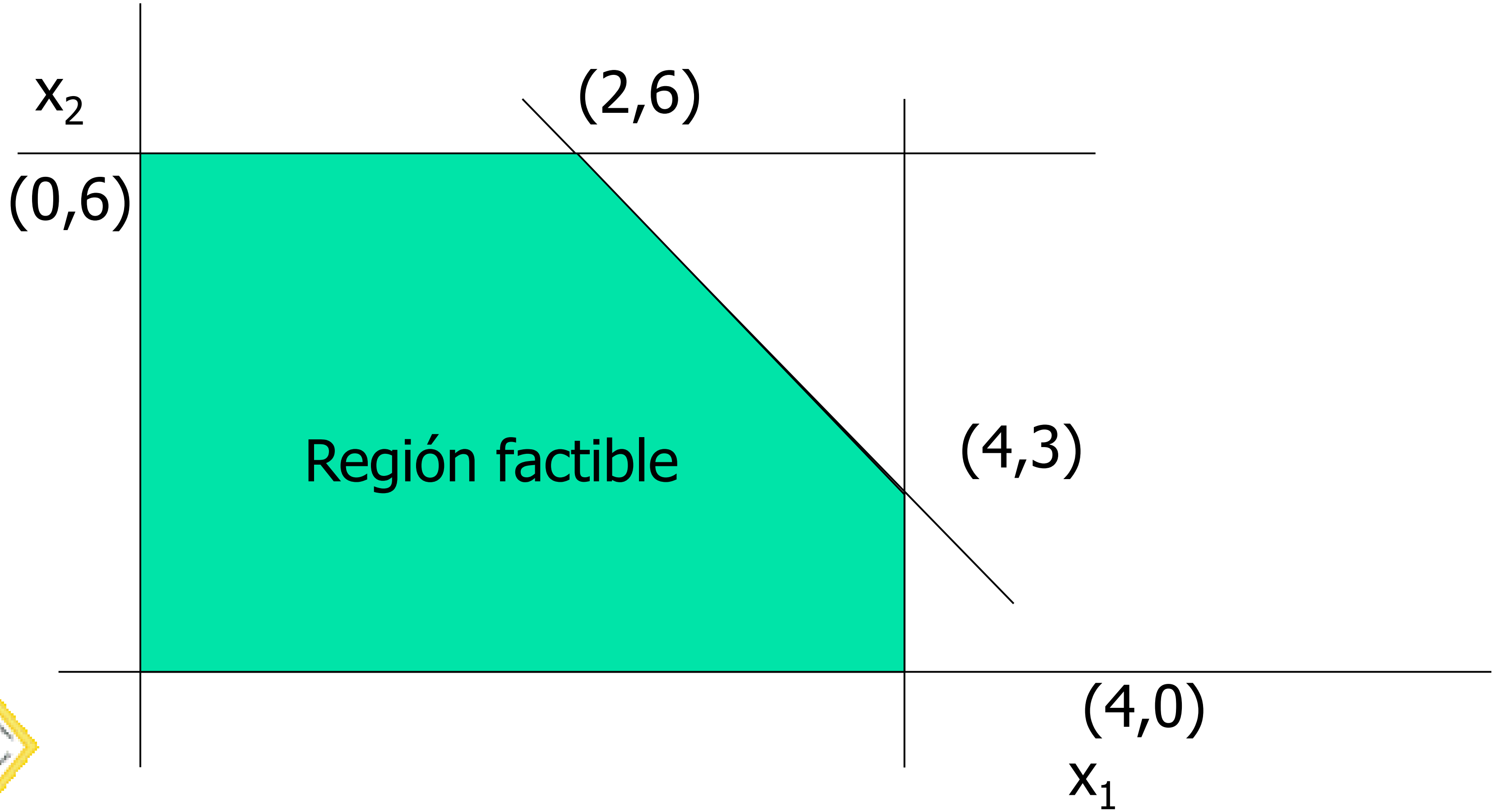
Resolviendo el problema

- Método intuitivo
- Enumeración completa
- Solución gráfica
- Métodos matemáticos exactos
  - Simplex
  - Otros
- Heurísticas

La solución gráfica

- Un problema de programación lineal puede representarse como un espacio convexo
- Formado por la intersección de las diferentes restricciones
- De manera general, se formará un hiperespacio en la región $\Re^n$, formado por la intersección de m hiperplanos, también localizados en $\Re^n$

Solución gráfica



La solución óptima

- La región factible es el conjunto de valores que una variable de decisión puede asumir y simultáneamente satisfacer las diferentes restricciones.
- Es una región convexa, por lo tanto sus esquinas son una función ponderada de cualquier combinación de los puntos que la forman.
- Las posibles soluciones están localizadas en las intersecciones o esquinas de los hiperplanos formados por las restricciones.

La solución óptima

- Si existe una solución óptima, ésta deberá estar en una esquina.
- Si hay más de una solución, al menos dos de ellas deberán estar en esquinas adyacentes.
- Existe un número finito de soluciones esquinas.
- Si una esquina proporciona una solución igual o mejor que sus puntos esquinas factibles adyacentes, entonces es óptimo.

La solución óptima

		Función objetivo	
Esquinas		x_1	x_2
x_1	x_2	3	5
0	6	30	
2	6	36	
4	3	27	
4	0	12	

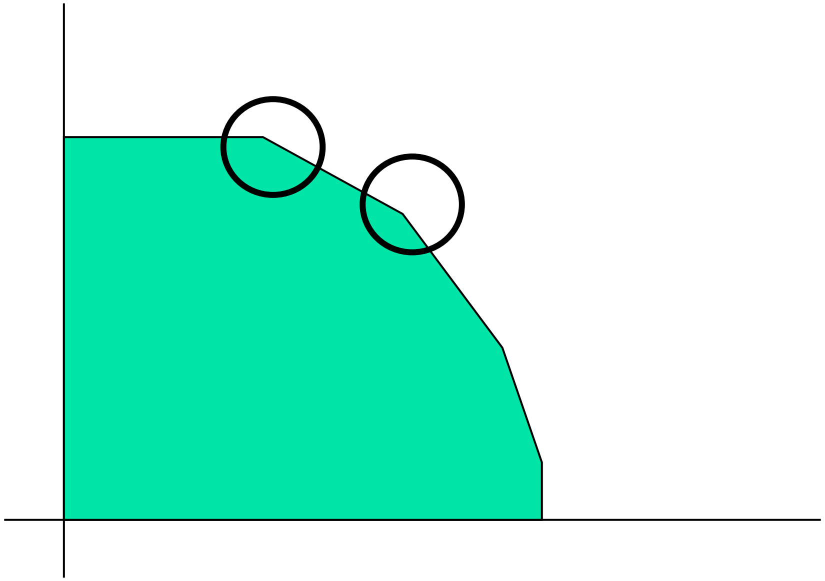
Óptimo

Significado de la solución

- La mezcla óptima de productos será
  - 2 puertas y 6 ventanas
  - Un ingreso o utilidad de 36 unidades monetarias
  - Quedarán disponible recursos en la planta A para poder hacer 2 puertas más ($2 \leq 4$)
  - No quedarán recursos disponibles recursos en la planta B ($2*6 = 12$)
  - No quedarán recursos disponibles en la planta B ($3*2 + 2*6 = 18$)

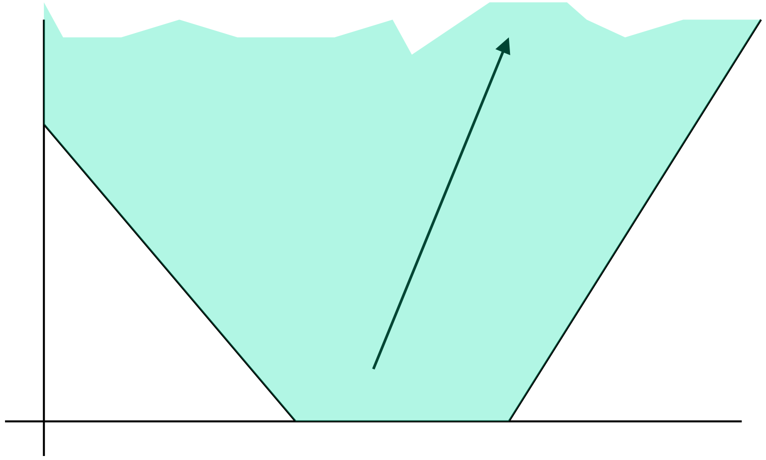
Algunas condiciones especiales

- Soluciones alternas: puede existir más de una solución óptima, pero al menos una de ellas debe estar en una esquina.



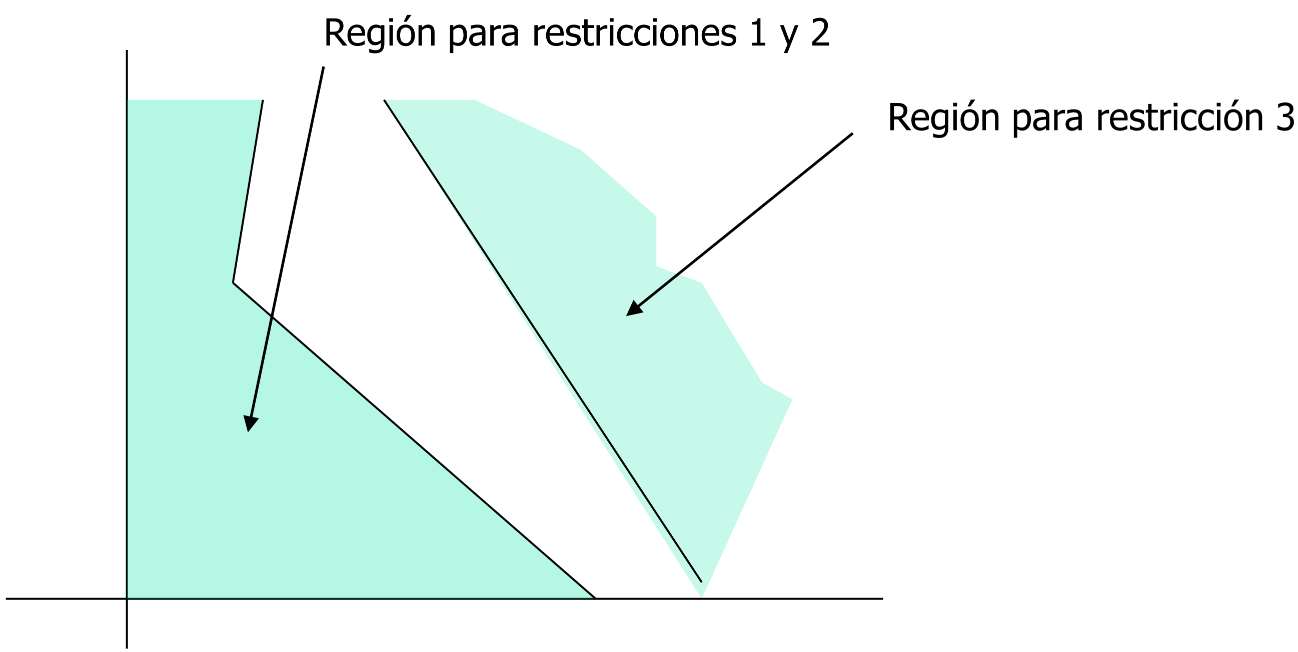
Solución no limitada

- El espacio o región de la solución no está limitado por ninguna restricción, por lo que la solución podrá variar de manera infinita sin límite. Normalmente esto indica un error en la formulación



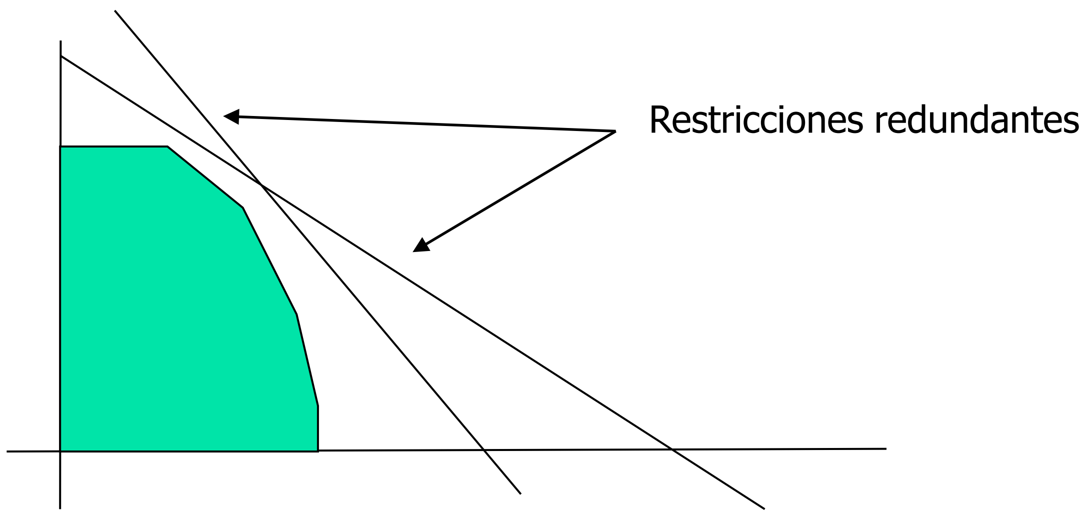
Problema no factible

- Cuando el conjunto de soluciones es un conjunto vacío, esto es, no hay puntos dentro de la región factible que satisfaga todas las soluciones



Restricciones redundantes

- Hay más de una restricción que no afecta la región factible, al estar la misma limitada por otras restricciones. Estas restricciones no son necesarias para encontrar la solución del modelo



El Método Simplex

- Desarrollado en 1947 por George Dantzig como parte de un proyecto para el Departamento de Defensa
- Se basa en la propiedad de la solución esquina de P. L.
- Complejidad O(n)
- No se ha desarrollado método más confiable para problemas grandes (n, m > 10,000)

El Método Simplex …

- Es un proceso iterativo
  - Solución inicial en el origen lo que obliga a crea un problema con condiciones iniciales
  - Busca una solución en cada esquina del sistema $\Re^n$, partiendo del origen
  - Prueba de optimalidad

Descripción general

Para la formulación estándar:

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{Max (o Min)} & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & & \\
\text{s.t.} & & & \\
& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
& \vdots & = & \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \\
& x_i & \geq & 0 \quad \forall\, i = 1 \ldots n
\end{array}
$$

Such that:

$$
[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \qquad \{b\} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Bmatrix}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\max & x_0 = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
\text{subject to} & \begin{cases} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{cases}
\end{array}
$$

En la forma canónica $[A]\{x\} = \{b\}$

La solución inicial

- El Simplex asume una solución inicial en el origen, por lo que todas las variables iniciales son cero.
- Para poder que exista una solución inicial factible, Simplex se ve obligado a crear una forma aumentada.

La solución aumentada

- Es la solución a un problema de programación lineal expresado originalmente de manera estándar y que ha sido aumentado introduciendo las variables de holgura y artificiales correspondientes.
- Una solución básica es una solución esquina aumentada
- Una solución básica factible es una solución esquina aumentada factible.

Propiedades de la solución

- Grados de libertad del modelo: es la diferencia entre el número de variables en la forma aumentada y el número de restricciones (no considerando la no negatividad)
- A fin de poder resolver un sistema de ecuaciones, habrá que dar valores arbitrarios a las variables que exceden. Simplex asume 0

Expresión aumentada: Convertir todas las restricciones en igualdad

- El caso de ≤
  - Es necesario añadir una variable de holgura

    $x_1 \leq 4; x_1 = 4 - x_3; x_1 + x_3 = 4$
- El caso de ≥
  - Es necesario añadir una variable de holgura

    $x_1 \geq 5; x_1 = 5 + x_4; x_1 - x_4 = 5$
  - Es necesario añadir una variable artificial x_5 tal que, $x_1 - x_4 + x_5 = 5$ y no viole la condición de $x_j > 0$ en la solución inicial donde su coeficiente en la solución será M>>0 tal que x_5 tenga que ser cero para que no la variable artificial no aparezca en la solución
- Es caso de =
  - Se añade una variable artificial con coeficiente M en la solución

    $x_1 = 5; x_1 + x_6 = 5$

Formulación aumentada del ejemplo

Maximizar Z tal que:

$$
\begin{array}{lllll}
Z - 3x_1 - 5x_2 & & & & = 0 \\
x_1 + & x_3 & & & = 4 \\
2x_2 & & +x_4 & & = 12 \\
3x_1 + 2x_2 & & & + x_5 & = 18
\end{array}
$$

En el ejemplo son 2 variables originales, 3 variables de holgura y tres restricciones, por lo tanto el modelo tiene 2 grados de libertad

La solución inicial

- Las variables que se fijan en cero se conocen como variables no básicas
- Las variables que aparecen en la solución se conocen como básicas
- La solución básica factible inicial se hace tal que

$x_1 = x_2 = 0$ y

$x_3 = 4$

$x_4 = 12$

$x_5 = 18$

- La solución es no óptima porque se puede encontrar otra solución adyacente mejor.

La solución inicial

La formulación estándar: $[A \quad I]\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_s \end{bmatrix} = A\mathbf{x} + I\mathbf{x}_s = \mathbf{b}.$

El tableau inicial

Slack variables

$$
\begin{array}{c|cccccccccccc|c|}
 & x_1 & x_2 & \cdots & x_s & \cdots & x_n & x_{n+1} & \cdots & x_{n+r} & \cdots & x_{n+m} & \mathbf{b} \\
\hline
x_{n+1} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\
x_{n+2} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
x_{n+r} & a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rs} & \cdots & a_{rn} & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & b_r \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
x_{n+m} & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} & \cdots & a_{mn} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & b_r \\
\hline
x_0 & -c_1 & -c_2 & \cdots & -c_s & \cdots & -c_n & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

El conjunto de variables en la solución se le conoce como variables básicas y la solución es una solución básica factible.

En la solución inicial, las variables de decisión $x_1,\ldots, x_n = 0$, y son variables no básicas en dicha solución

El proceso iterativo

- A fin de encontrar una mejor solución adyacente, una variable no básica se convierte en básica y una básica en no básica.
- La variable que entra es aquella que aumente el valor de Z de manera más rápida
- Sale la que se hace no básica primero, a medida que la nueva variable básica aumenta.
- La solución óptima se obtiene cuando no existan variables no básicas que hagan aumentar el valor de Z

Moviéndose en el espacio $\Re^n$

- Sea β el conjunto de variables básicas, tal que en la solución inicial $\beta = \{x_{n+i}\}_{i=1,\,m}$
- Sea η el conjunto de variables no básicas, tal que en la solución inicial $\eta=\{x_i\}_{i=1,n}$
- Para reemplazar $x_r \in \beta$ por $x_s \in \eta$ se define el elemento a_{rs} como pivote de tal manera que la operación se convierte en una eliminación Gaussiana, tal que

$$
\begin{array}{c|c|c|}
 & j & s \\
\hline
i & a_{ij} & a_{is} \\
\hline
r & a_{rj} & a^*_{rs} \\
\hline
\end{array}
\quad \text{becomes} \quad
\begin{array}{c|c|c|}
 & j & s \\
\hline
i & a_{ij} - a_{rj}a_{is}/a_{rs} & 0 \\
\hline
r & a_{rj}/a_{rs} & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

Moviéndose en el espacio $\Re^n$

- La variable que entra x_s ser seleccionará de acuerdo a alguna prueba de optimalidad, por ejemplo, la varialbe más positiva o más negativa.
- Una estrategia será la de seleccionar la variable con el mayor costo reducido. En PL, el costo reducido o el costo de oportunidad, es el monto en el que un coeficiente en la función objetivo debe mejorar antes que sea posible a la variable correspondiente tomar un valor positivo en la solución óptima.
- La variable que sale x_r se deberá seleccionar como la variable básica correspondiente a la razón positiva más pequeña de los valores del lado derecho de la restricción y e la variable que entra x_s

$$\frac{y_{r0}}{y_{rs}} = \min_i\{\frac{y_{i0}}{y_{is}} \mid y_{is} > 0\}$$

El ejemplo Wyndor: El tableau inicial

	X_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_3	1	0	1	0	0	4	4/0
x_4	0	2	0	1	0	12	12/2
X_5	3	2	0	0	1	18	18/2
z	-3	-5	0	0	0	0	

Sale

Entra

El Dual

- Todo problema de maximización (minimización) en P. L. tiene un problema equivalente de minimización (maximización).

Primal

$$\text{Max } Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

s. a.:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \leq b_i \ \forall\ i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0$$

Dual:

$$\text{Min } Y = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

s. a.:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} y_i \geq cj \ \forall\ j = 1, 2, \ldots, n$$

$$y_i \geq 0$$

Relación Primal - Dual

		Problema primal		
Problema Dual	Coeficientes de y_i	Coeficientes de x_1 x_2 ... x_n	$\leq b_i$	Coeficientes de la F. O. (Minimizar)
	Y_1	$a_{1,1}$ $a_{1,2}$ ... $a_{1,n}$	b_1	
	y_2	$a_{2,1}$ $a_{2,2}$ ... $a_{2,n}$	b_2	
	. . .	. . .	. . .	
	y_m	$a_{m,1}$ $a_{m,2}$ ... $a_{m,n}$	b_m	
	$\geq c_j$	c_1 c_2 ... c_n		

La solución del dual

La solución de las variables y_i representa la contribución a la utilidad por unidad de recurso i que se obtiene cuando el conjunto actual de variables básicas es utilizado para resolver el primal. En otros palabras **LOS PRECIOS SOMBRA**

El precio sombra

- El precio sombra del recurso i mide el valor marginal de dicho recurso, es decir, la tasa en que Z puede cambiar si varia el recurso b_i
- El valor en que se puede “vender” cada unidad de recurso i de tal manera que se indiferente utilizarlo o venderlo.

Análisis de sensibilidad o post-óptimo

- Estudia las posibles variaciones del problema una vez esta ha sido resuelto.
- Se utiliza para determinar la variación de un coeficiente o de una restricción sin variar la validez de una solución.
- Se hace debido a:
  - El alto costo de desarrollar otro modelo de P. L.
  - Ver la variación de datos aproximados
  - Estudiar diferentes escenarios

Cambios paramétricos

- **Cambios en el coeficiente de una variable no básica**: no afectan la solución ya que estas no aparecen en la solución del modelo.
- **Introducción de una nueva variable**: habrá que ver si la nueva restricción afecta la solución del dual
- **Cambios en b_i**: pueden cambiar el problema y los precios sombra
- **Cambios en los coeficientes de la variable básica**: afecta el valor de la función objetivo.

Análisis de sensibilidad

- Es una de las partes más importantes en la programación lineal.
- Permite determinar cuando una solución sigue siendo óptima dados algunos cambios en el problema.
- Consiste en determinar que tan sensible es la respuesta óptima al cambio de algunos datos como los coeficientes de la función objetivo) o los términos independientes de las restricciones.

Objetivo

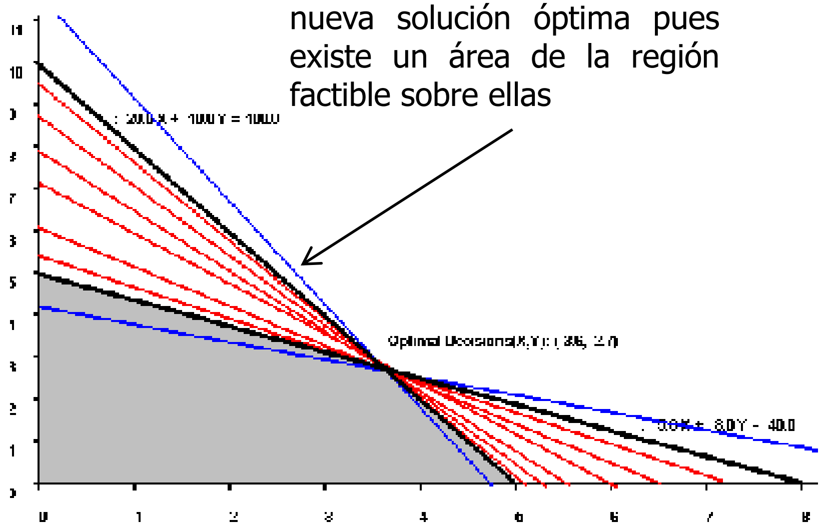
- Establecer un intervalo de números reales en el cual el dato que se analiza puede estar contenido, de tal manera que la solución sigue siendo óptima siempre que el dato pertenezca a dicho intervalo
- Los análisis más importantes son;
  - Los coeficientes de la función objetivo; y
  - Los términos independientes de las restricciones

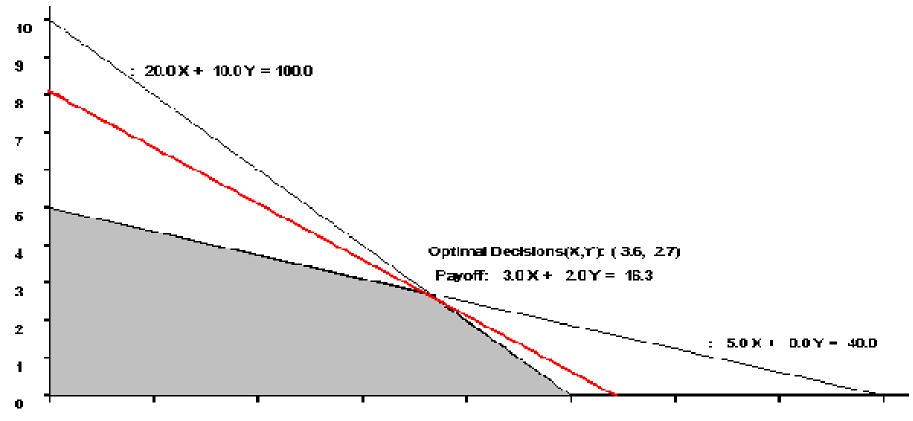
Análisis para los coeficientes de la función objetivo

- El objetivo es encontrar el rango de los coeficientes para que la solución original se mantenga óptima

Todas las líneas rojas mantienen la solución óptima. Las líneas azules generan una nueva solución óptima pues existe un área de la región factible sobre ellas

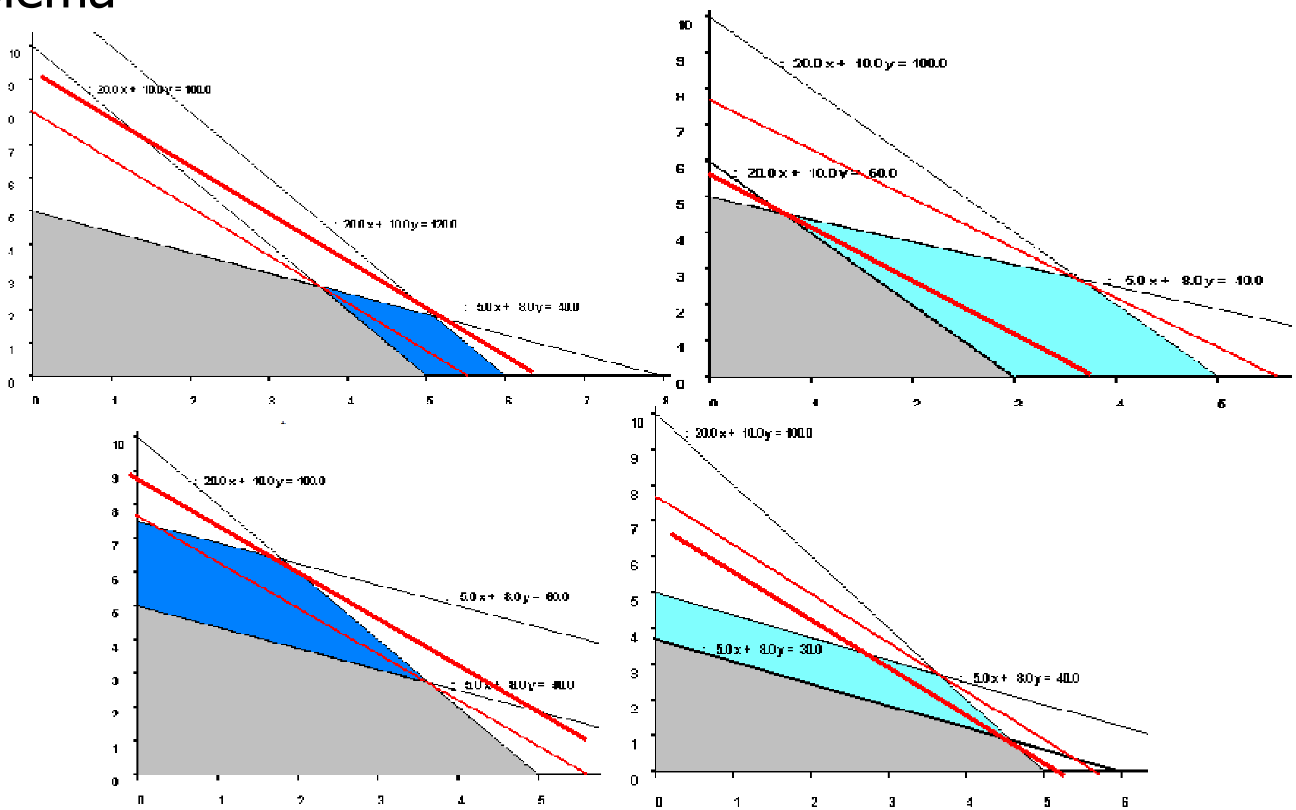
$$
\begin{aligned}
&Máx \quad Z = 3x + 2y \\
&s/a \quad 5x + 8y \leq 40 \\
&\qquad 20x + 10y \leq 100 \\
&\qquad x \geq 0;\ y \geq 0
\end{aligned}
$$



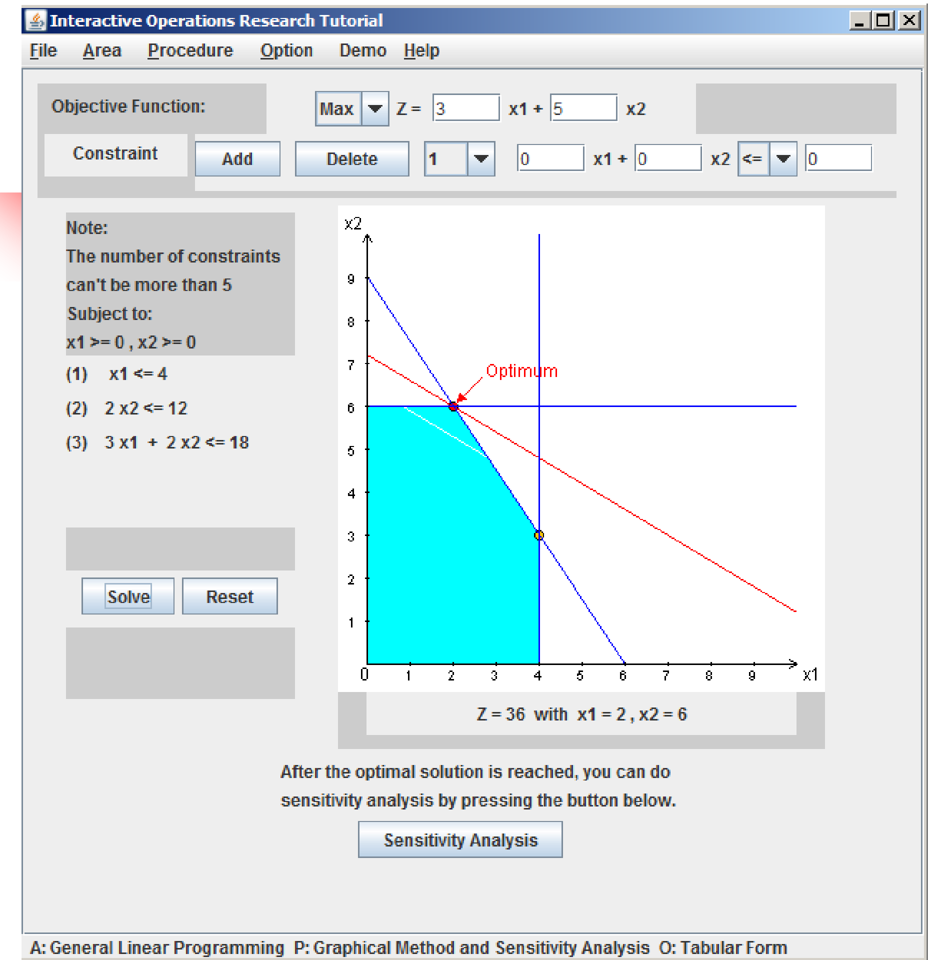


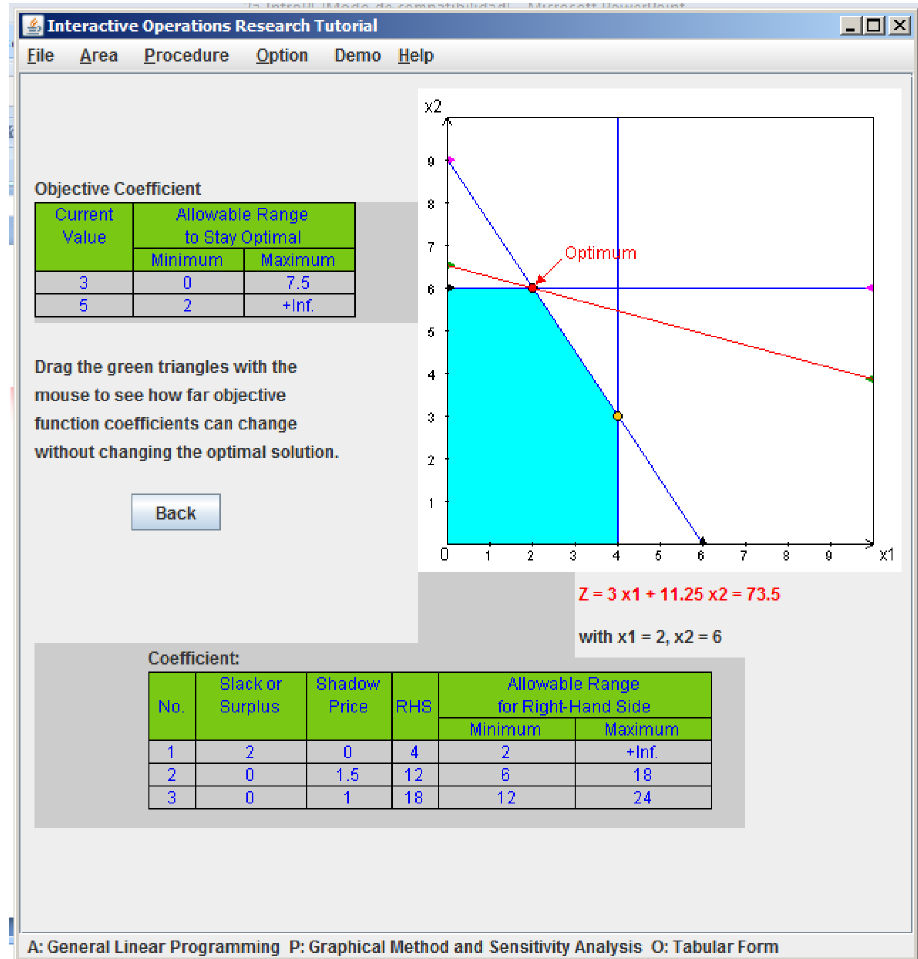
Análisis para los términos independientes de las restricciones

- El objetivo será que las restricciones que le daban solución al problema original, le den también solución al nuevo problema



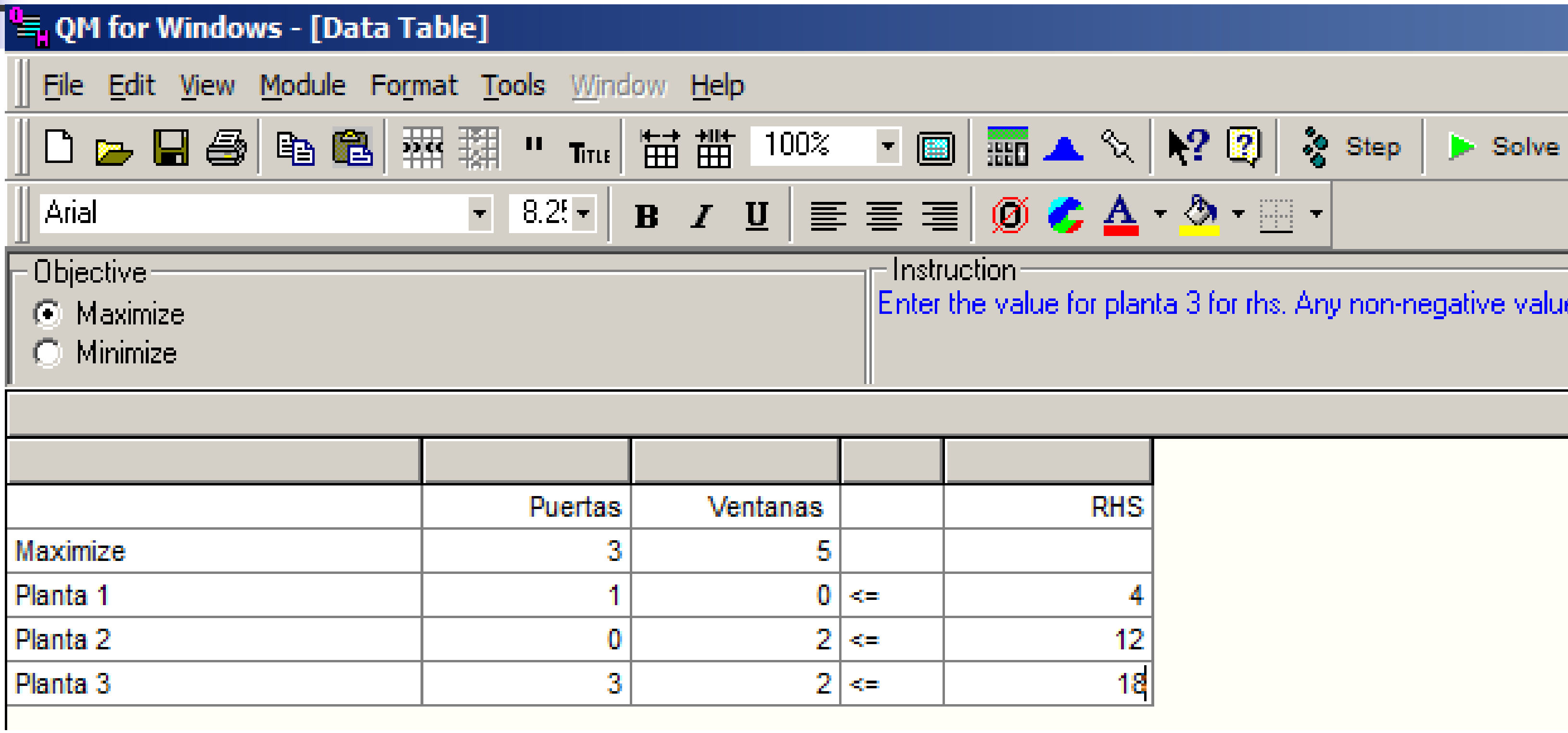
IOR Tutorial





Uso de software: QM

Entrada de datos



	Puertas	Ventanas		RHS
Maximize	3	5		
Planta 1	1	0	<=	4
Planta 2	0	2	<=	12
Planta 3	3	2	<=	18

Respuesta QM

QM for Windows

Objective: Maximize / Minimize

Instruction: There are more results available in additional windows

Linear Programming Results

	Puertas	Ventanas		RHS	Dual
Maximize	3.	5.			
Planta 1	1.	0.	<=	4.	0.
Planta 2	0.	2.	<=	12.	1.5
Planta 3	3.	2.	<=	18.	1.
Solution->	2.	6.		$36.	

Solution list

Variable	Status	Value
Puertas	Basic	2.
Ventanas	Basic	6.
slack 1	Basic	2.
slack 2	NONBasic	0.
slack 3	NONBasic	0.
Optimal Value (Z)		36.

Análisis de sensibilidad

Linear Programming Results

Ranging

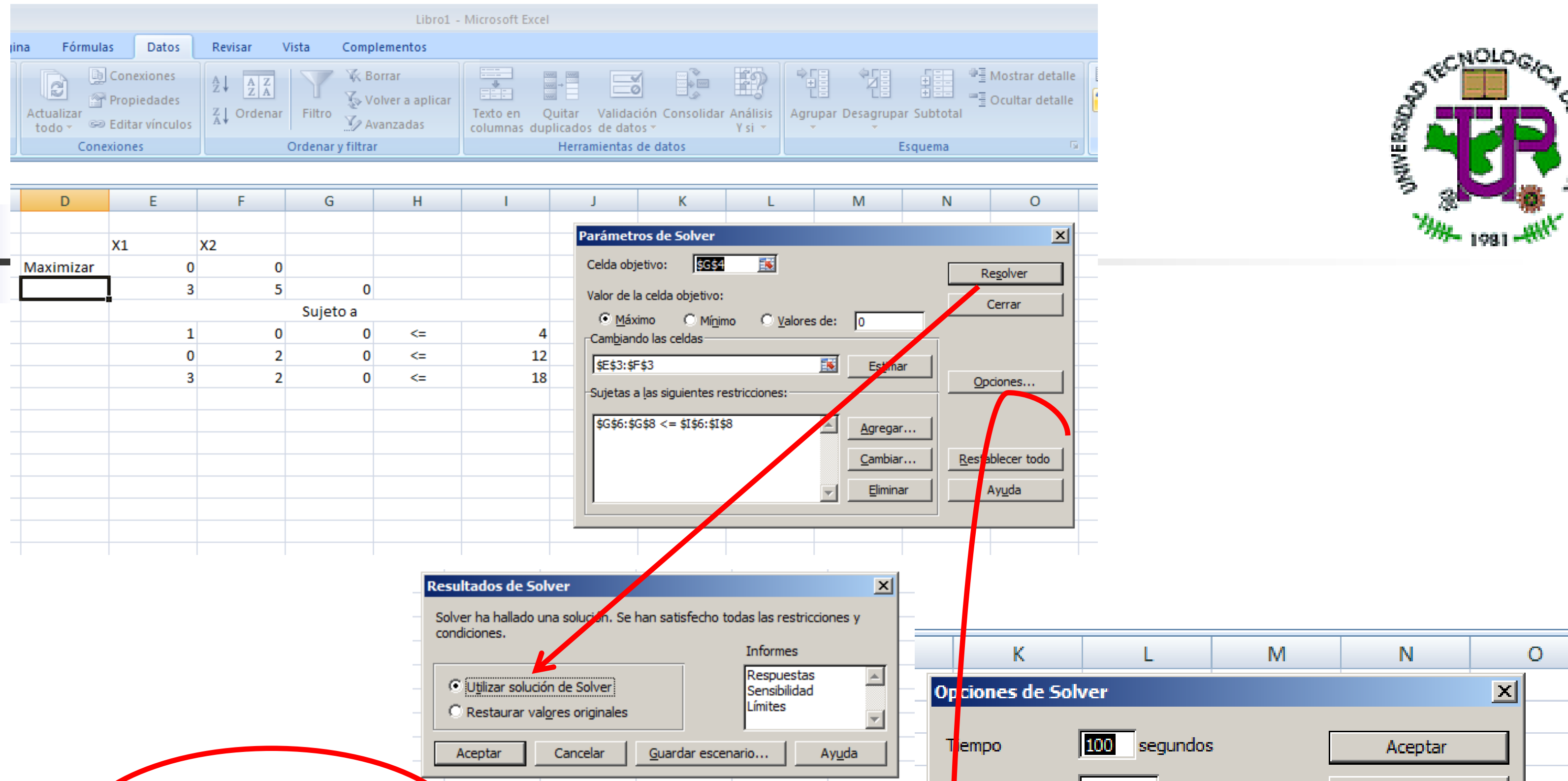
Variable	Value	Reduced Cost	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
Puertas	2.	0.	3.	0.	7.5
Ventanas	6.	0.	5.	2.	Infinity
Constraint	Dual Value	Slack/Surplus	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
Planta 1	0.	2.	4.	2.	Infinity
Planta 2	1.5	0.	12.	6.	18.
Planta 3	1.	0.	18.	12.	24.

Iteraciones SIMPLEX

Iterations

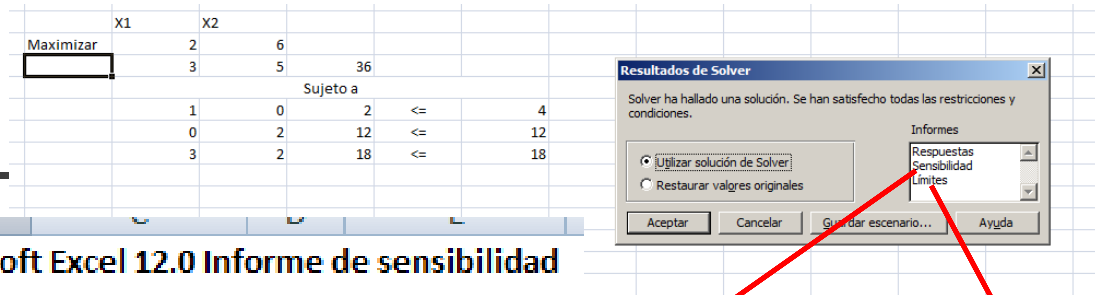
Cj	Basic ariables	3 Puertas	5	0 slack 1	0 slack 2	0 slack 3	luantity
Iteration 1							
0	slack 1	1.	0.	1.	0.	0.	4.
0	slack 2	0.	2.	0.	1.	0.	12.
0	slack 3	3.	2.	0.	0.	1.	18.
	zj	0.	0.	0.	0.	0.	0.
	cj-zj	3.	5.	0.	0.	0.	
Iteration 2							
0	slack 1	1.	0.	1.	0.	0.	4.
5		0.	1.	0.	0.5	0.	6.
0	slack 3	3.	0.	0.	-1.	1.	6.
	zj	0.	5.	0.	2.5	0.	30.
	cj-zj	3.	0.	0.	-2.5	0.	
Iteration 3							
0	slack 1	0.	0.	1.	0.3333	-0.3333	2.
5		0.	1.	0.	0.5	0.	6.
3	Puertas	1.	0.	0.	-0.3333	0.3333	2.
	zj	3.	5.	0.	1.5	1.	36.
	cj-zj	0.	0.	0.	-1.5	-1.	

Solver



	X1	X2			
Maximizar	2	6			
	3	5	36		
			Sujeto a		
	1	0	2	<=	4
	0	2	12	<=	12
	3	2	18	<=	18

Sover: análisis de sensibilidad



Microsoft Excel 12.0 Informe de sensibilidad
Hoja de cálculo: [Libro1]Hoja1
Informe creado: 05/20/2011 08:08:05 a.m.

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor Igual	Gradiente reducido
E3	Maximizar X1	2	0
F3	Maximizar X2	6	0

Restricciones

Celda	Nombre	Valor Igual	Multiplicador de Lagrange
G6		2	0
G7		12	1.5
G8		18	1

Microsoft Excel 12.0 Informe de límites
Hoja de cálculo: [Libro1]Informe de límites 1
Informe creado: 05/20/2011 08:08:43 a.m.

Celda objetivo		
Celda	Nombre	Igual
G4		36

Celdas cambiantes						
Celda	Nombre	Igual	Límite inferior	Celda objetivo	Límite superior	Celda objetivo
E3	Maximizar X1	2	0	30	2	36
F3	Maximizar X2	6	0	6	6	36

	X1	X2		RHS
Maximize	3	5		
Constraint 1	1	0	<=	4
Constraint 2	0	2	<=	12
Constraint 3	3	2	<=	18

	X1	X2		RHS	Dual
Maximize	3.	5.			
Constraint 1	1.	0.	<=	4.	0.
Constraint 2	0.	2.	<=	12.	1.5
Constraint 3	3.	2.	<=	18.	1.
Solution->	2.	6.		$36.	

(untitled) Solution

Variable	Value	Reduced Cost	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
X1	2.	0.	3.	0.	7.5
X2	6.	0.	5.	2.	Infinity
Constraint	Dual Value	Slack/Surplus	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
Constraint 1	0.	2.	4.	2.	Infinity
Constraint 2	1.5	0.	12.	6.	18.
Constraint 3	1.	0.	18.	12.	24.

	13:40:00		Friday	June	24	2011		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	2.0000	3.0000	6.0000	0	basic	0	7.5000
2	X2	6.0000	5.0000	30.0000	0	basic	2.0000	M
	Objective	Function	(Max.) =	36.0000				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	2.0000	<=	4.0000	2.0000	0	2.0000	M
2	C2	12.0000	<=	12.0000	0	1.5000	6.0000	18.0000
3	C3	18.0000	<=	18.0000	0	1.0000	12.0000	24.0000

(untitled) Solution

Variable	Value	Reduced Cost	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
X1	2.	0.	3.	0.	7.5
X2	6.	0.	5.	2.	Infinity
Constraint	Dual Value	Slack/Surplus	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
Constraint 1	0.	2.	4.	2.	Infinity
Constraint 2	1.5	0.	12.	6.	18.
Constraint 3	1.	0.	18.	12.	24.