El Método Simplex

H. R. Alvarez A., Ph. D.

El Método Simplex

- Desarrollado en 1947 por George Dantzig como parte de un proyecto para el Departamento de Defensa
- Se basa en la propiedad de la solución esquina de P. L.
- Complejidad O(n)
- No se ha desarrollado método más confiable para problemas grandes (n, m > 10,000)

El Método Simplex …

- Es un proceso iterativo
  - Solución inicial en el origen lo que obliga a crea un problema con condiciones iniciales
  - Busca una solución en cada esquina del sistema $\Re^n$, partiendo del origen
  - Prueba de optimalidad

Descripción general

Para la formulación estándar:

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{Max (o Min)} & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & & \\
\text{s.t.} & & & \\
 & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & \vdots & = & \vdots \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \\
 & x_i & \geq & 0 \quad \forall\, i = 1 \ldots n
\end{array}
$$

Such that:

$$
[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \qquad \{b\} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Bmatrix}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{max} & x_0 = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
\text{subject to} & \begin{cases} A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{cases}
\end{array}
$$

En la forma canónica $[A]\{x\} = \{b\}$

La solución inicial

- El Simplex asume una solución inicial en el origen, por lo que todas las variables iniciales son cero.
- Para poder que exista una solución inicial factible, Simplex se ve obligado a crear una forma aumentada.

La solución aumentada

- Es la solución a un problema de programación lineal expresado originalmente de manera estándar y que ha sido aumentado introduciendo las variables de holgura y artificiales correspondientes.
- Una solución básica es una solución esquina aumentada
- Una solución básica factible es una solución esquina aumentada factible.

Propiedades de la solución

- Grados de libertad del modelo: es la diferencia entre el número de variables en la forma aumentada y el número de restricciones (no considerando la no negatividad)
- A fin de poder resolver un sistema de ecuaciones, habrá que dar valores arbitrarios a las variables que exceden. Simplex asume 0

Expresión aumentada: Convertir todas las restricciones en igualdad

- El caso de ≤
  - Es necesario añadir una variable de holgura

    $x_1 \leq 4;\ x_1 = 4 - x_3;\ x_1 + x_3 = 4$
- El caso de ≥
  - Es necesario añadir una variable de holgura

    $x_1 \geq 5;\ x_1 = 5 + x_4;\ x_1 - x_4 = 5$
  - Es necesario añadir una variable artificial x_5 tal que, $x_1 - x_4 + x_5 = 5$ y no viole la condición de $x_j > 0$ en la solución inicial donde su coeficiente en la solución será M>>0 tal que x_5 tenga que ser cero para que no la variable artificial no aparezca en la solución
- Es caso de =
  - Se añade una variable artificial con coeficiente M en la solución

    $x_1 = 5;\ x_1 + x_6 = 5$

Formulación aumentada del ejemplo

Maximizar Z tal que:

$$
\begin{array}{lllllll}
Z - 3x_1 - 5x_2 & & & & & = & 0 \\
x_1 + & & x_3 & & & = & 4 \\
& 2x_2 & & +x_4 & & = & 12 \\
3x_1 + 2x_2 & & & & + x_5 & = & 18
\end{array}
$$

En el ejemplo son 2 variables originales, 3 variables de holgura y tres restricciones, por lo tanto el modelo tiene 2 grados de libertad

La solución inicial

- Las variables que se fijan en cero se conocen como variables no básicas
- Las variables que aparecen en la solución se conocen como básicas
- La solución básica factible inicial se hace tal que

$x_1 = x_2 = 0$ y

$x_3 = 4$

$x_4 = 12$

$x_5 = 18$

- La solución es no óptima porque se puede encontrar otra solución adyacente mejor.

La solución inicial

La formulación estándar: $$[A \quad I]\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_s \end{bmatrix} = A\mathbf{x} + I\mathbf{x}_s = \mathbf{b}.$$

El tableau inicial

		x_1	x_2	$\cdots$	x_s	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	$\cdots$	x_{n+r}	$\cdots$	x_{n+m}	$\mathbf{b}$
Slack variables	x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1s}	$\cdots$	a_{1n}	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	b_1
	x_{n+2}	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2s}	$\cdots$	a_{2n}	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	b_2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
	x_{n+r}	a_{r1}	a_{r2}	$\cdots$	a_{rs}	$\cdots$	a_{rn}	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	b_r
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
	x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{ms}	$\cdots$	a_{mn}	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	b_r
	x_0	$-c_1$	$-c_2$	$\cdots$	$-c_s$	$\cdots$	$-c_n$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	0

El conjunto de variables en la solución se le conoce como variables básicas y la solución es una solución básica factible.

En la solución inicial, las variables de decisión $x_1, \ldots, x_n = 0$, y son variables no básicas en dicha solución

El proceso iterativo

- A fin de encontrar una mejor solución adyacente, una variable no básica se convierte en básica y una básica en no básica.
- La variable que entra es aquella que aumente el valor de Z de manera más rápida
- Sale la que se hace no básica primero, a medida que la nueva variable básica aumenta.
- La solución óptima se obtiene cuando no existan variables no básicas que hagan aumentar el valor de Z

Moviéndose en el espacio $\Re^n$

- Sea β el conjunto de variables básicas, tal que en la solución inicial $\beta = \{x_{n+i}\}_{i=1,\,m}$
- Sea η el conjunto de variables no básicas, tal que en la solución inicial $\eta=\{x_i\}_{i=1,n}$
- Para reemplazar $x_r \in \beta$ por $x_s \in \eta$ se define el elemento a_{rs} como pivote de tal manera que la operación se convierte en una eliminación Gaussiana, tal que

$$\begin{array}{c|c|c|}
 & j & s \\
\hline
i & a_{ij} & a_{is} \\
\hline
r & a_{rj} & a_{rs}^{*} \\
\hline
\end{array}
\quad \text{becomes} \quad
\begin{array}{c|c|c|}
 & j & s \\
\hline
i & a_{ij} - a_{rj}a_{is}/a_{rs} & 0 \\
\hline
r & a_{rj}/a_{rs} & 1 \\
\hline
\end{array}$$

Moviéndose en el espacio $\Re^n$

- La variable que entra x_s ser seleccionará de acuerdo a alguna prueba de optimalidad, por ejemplo, la varialbe más positiva o más negativa.
- Una estrategia será la de seleccionar la variable con el mayor costo reducido. En PL, el costo reducido o el costo de oportunidad, es el monto en el que un coeficiente en la función objetivo debe mejorar antes que sea posible a la variable correspondiente tomar un valor positivo en la solución óptima.
- La variable que sale x_r se deberá seleccionar como la variable básica correspondiente a la razón positiva más pequeña de los valores del lado derecho de la restricción y e la variable que entra x_s

$$\frac{y_{r0}}{y_{rs}} = \min_i \{ \frac{y_{i0}}{y_{is}} \mid y_{is} > 0 \}$$

El ejemplo Wyndor: El tableau inicial

	X_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
x_3	1	0	1	0	0	4	4/0
x_4	0	2	0	1	0	12	12/2
X_5	3	2	0	0	1	18	18/2
z	-3	-5	0	0	0	0	

Entra

Sale

El Dual

- Todo problema de maximización (minimización) en P. L. tiene un problema equivalente de minimización (maximización).

Primal

$$\text{Max } Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

s. a.:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \le b_i \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_j \ge 0$$

Dual:

$$\text{Min } Y = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

s. a.:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} y_i \ge cj \quad \forall\, j = 1, 2, \ldots, n$$

$$y_i \ge 0$$

Relación Primal - Dual

		Problema primal		
Problema Dual	Coeficientes de y_i	Coeficientes de x_1 x_2 ... x_n	$\leq b_i$	Coeficientes de la F. O. (Minimizar)
	Y_1	$a_{1,1}$ $a_{1,2}$ ... $a_{1,n}$	b_1	
	y_2	$a_{2,1}$ $a_{2,2}$ ... $a_{2,n}$	b_2	
	. . .	. . .	. . .	
	y_m	$a_{m,1}$ $a_{m,2}$ ... $a_{m,n}$	b_m	
	$\geq c_j$	c_1 c_2 ... c_n		

La solución del dual

La solución de las variables y_i representa la contribución a la utilidad por unidad de recurso i que se obtiente cuando el conjunto actual de variables básicas es utilizado para resolver el primal. En otros palabras **LOS PRECIOS SOMBRA**

El precio sombra

- El precio sombra del recurso i mide el valor marginal de dicho recurso, es decir, la tasa en que Z puede cambiar si varia el recurso b_i
- El valor en que se puede “vender” cada unidad de recurso i de tal manera que se indiferente utilizarlo o venderlo.

Análisis de sensibilidad o post-óptimo

- Estudia las posibles variaciones del problema una vez esta ha sido resuelto.
- Se utiliza para determinar la variación de un coeficiente o de una restricción sin variar la validez de una solución.
- Se hace debido a:
  - El alto costo de desarrollar otro modelo de P. L.
  - Ver la variación de datos aproximados
  - Estudiar diferentes escenarios

Cambios paramétricos

- **Cambios en el coeficiente de una variable no básica**: no afectan la solución ya que estas no aparecen en la solución del modelo.
- **Introducción de una nueva variable**: habrá que ver si la nueva restricción afecta la solución del dual
- **Cambios en b_i**: pueden cambiar el problema y los precios sombra
- **Cambios en los coeficientes de la variable básica**: afecta el valor de la función objetivo.

Análisis de sensibilidad

- Es una de las partes más importantes en la programación lineal.
- Permite determinar cuando una solución sigue siendo óptima dados algunos cambios en el problema.
- Consiste en determinar que tan sensible es la respuesta óptima al cambio de algunos datos como los coeficientes de la función objetivo) o los términos independientes de las restricciones.

Objetivo

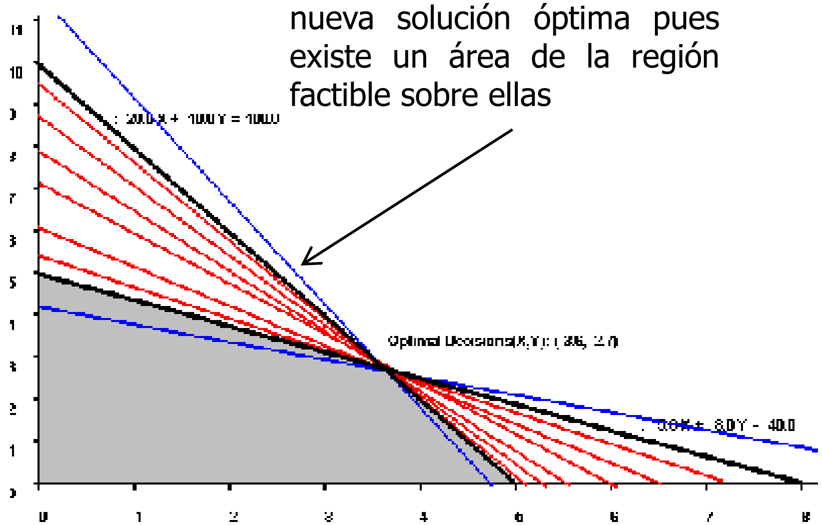
- Establecer un intervalo de números reales en el cual el dato que se analiza puede estar contenido, de tal manera que la solución sigue siendo óptima siempre que el dato pertenezca a dicho intervalo
- Los análisis más importantes son;
  - Los coeficientes de la función objetivo; y
  - Los términos independientes de las restricciones

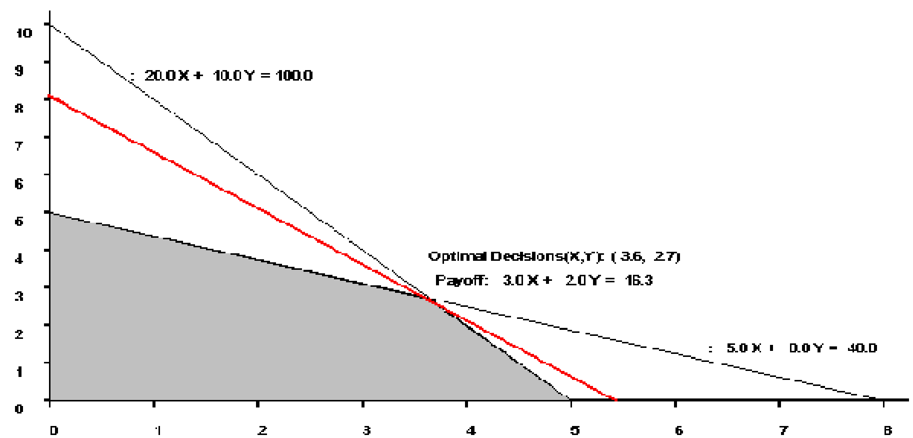
Análisis para los coeficientes de la función objetivo

- El objetivo es encontrar el rango de los coeficientes para que la solución original se mantenga óptima

Todas las líneas rojas mantienen la solución óptima. Las líneas azules generan una nueva solución óptima pues existe un área de la región factible sobre ellas

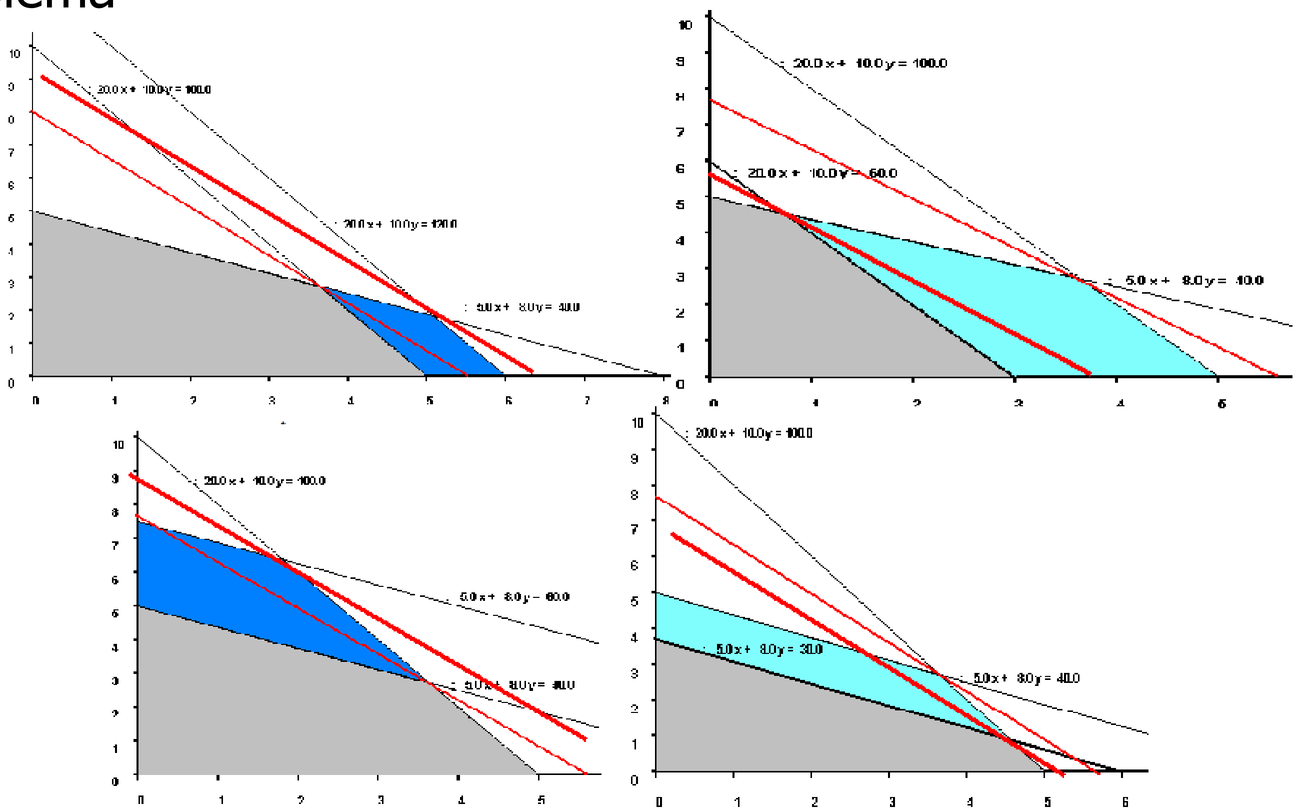
$$
\begin{aligned}
Máx \quad & Z = 3x + 2y \\
s/a \quad & 5x + 8y \le 40 \\
& 20x + 10y \le 100 \\
& x \ge 0 ;\ y \ge 0
\end{aligned}
$$



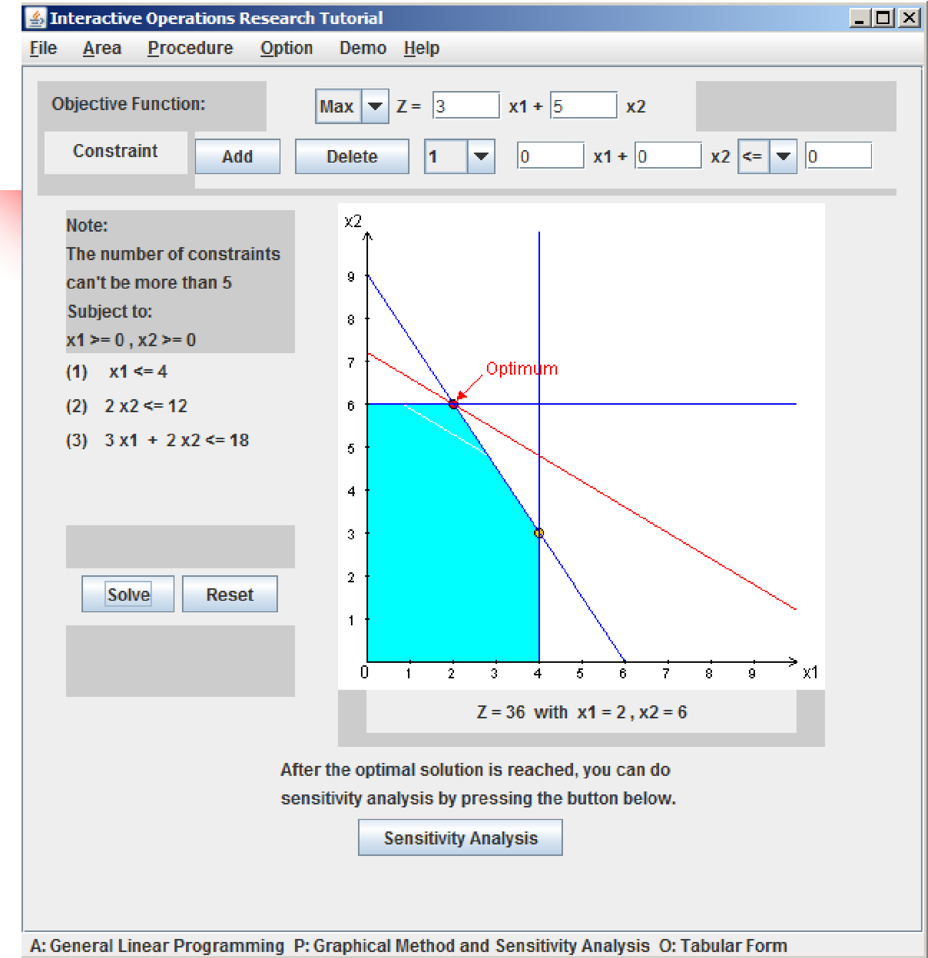


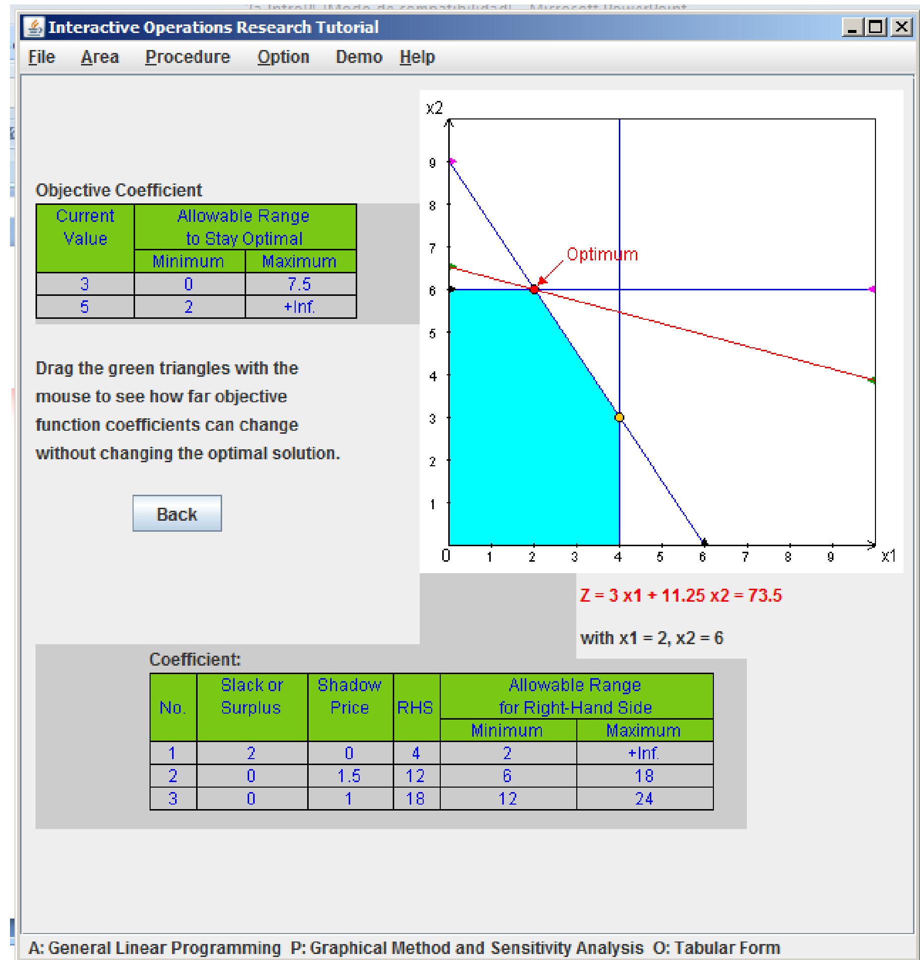
Análisis para los términos independientes de las restricciones

- El objetivo será que las restricciones que le daban solución al problema original, le den también solución al nuevo problema



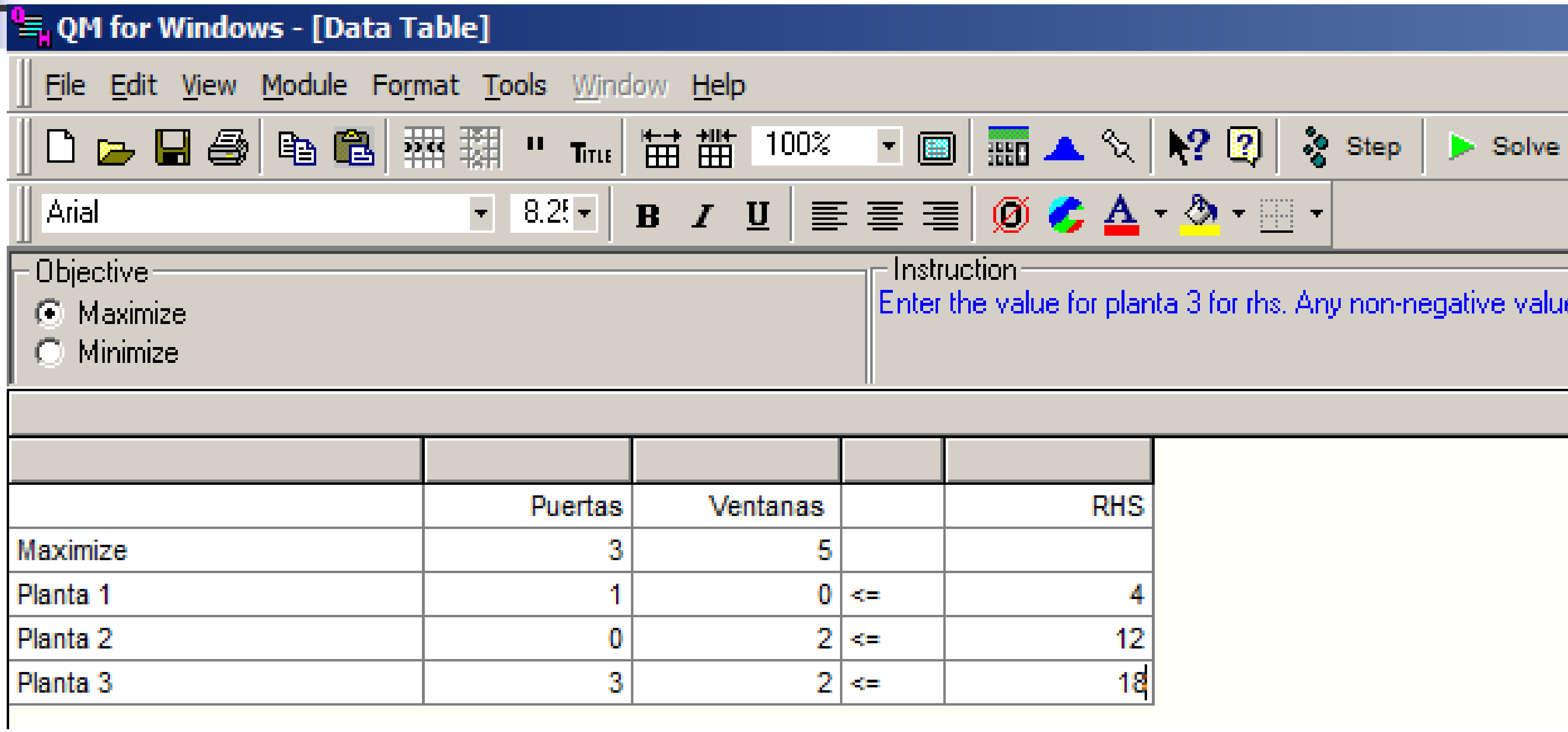
IOR Tutorial





Uso de software: QM

Entrada de datos



	Puertas	Ventanas		RHS
Maximize	3	5		
Planta 1	1	0	<=	4
Planta 2	0	2	<=	12
Planta 3	3	2	<=	18

Respuesta QM

Linear Programming Results

	Puertas	Ventanas		RHS	Dual
Maximize	3.	5.			
Planta 1	1.	0.	<=	4.	0.
Planta 2	0.	2.	<=	12.	1.5
Planta 3	3.	2.	<=	18.	1.
Solution->	2.	6.		$36.	

Solution list

Variable	Status	Value
Puertas	Basic	2.
Ventanas	Basic	6.
slack 1	Basic	2.
slack 2	NONBasic	0.
slack 3	NONBasic	0.
Optimal Value (Z)		36.

Análisis de sensibilidad

Linear Programming Results

Ranging

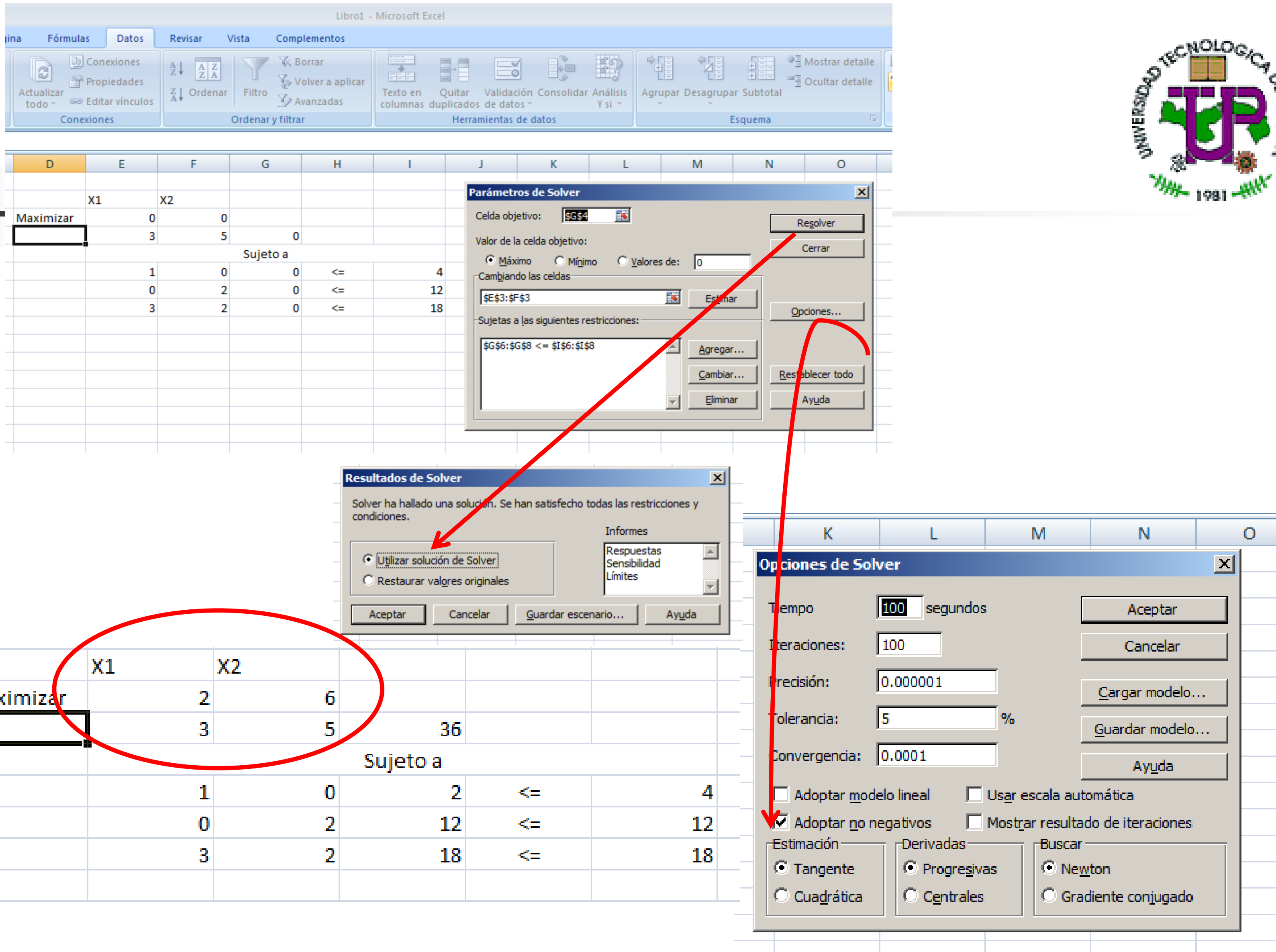
Variable	Value	Reduced Cost	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
Puertas	2.	0.	3.	0.	7.5
Ventanas	6.	0.	5.	2.	Infinity
Constraint	**Dual Value**	**Slack/Surplus**	**Original Val**	**Lower Bound**	**Upper Bound**
Planta 1	0.	2.	4.	2.	Infinity
Planta 2	1.5	0.	12.	6.	18.
Planta 3	1.	0.	18.	12.	24.

Iteraciones SIMPLEX

Iterations

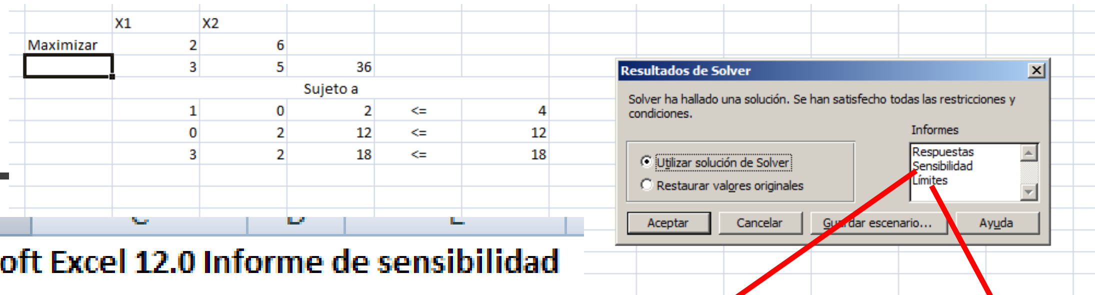
Cj	Basic ariables	3 Puertas	5	0 slack 1	0 slack 2	0 slack 3	uantity
Iteration 1							
0	slack 1	1.	0.	1.	0.	0.	4.
0	slack 2	0.	2.	0.	1.	0.	12.
0	slack 3	3.	2.	0.	0.	1.	18.
	zj	0.	0.	0.	0.	0.	0.
	cj-zj	3.	5.	0.	0.	0.	
Iteration 2							
0	slack 1	1.	0.	1.	0.	0.	4.
5		0.	1.	0.	0.5	0.	6.
0	slack 3	3.	0.	0.	-1.	1.	6.
	zj	0.	5.	0.	2.5	0.	30.
	cj-zj	3.	0.	0.	-2.5	0.	
Iteration 3							
0	slack 1	0.	0.	1.	0.3333	-0.3333	2.
5		0.	1.	0.	0.5	0.	6.
3	Puertas	1.	0.	0.	-0.3333	0.3333	2.
	zj	3.	5.	0.	1.5	1.	36.
	cj-zj	0.	0.	0.	-1.5	-1.	

Solver



	X1	X2			
Maximizar	2	6			
	3	5	36		
			Sujeto a		
	1	0	2	<=	4
	0	2	12	<=	12
	3	2	18	<=	18

Sover: análisis de sensibilidad



Microsoft Excel 12.0 Informe de sensibilidad
Hoja de cálculo: [Libro1]Hoja1
Informe creado: 05/20/2011 08:08:05 a.m.

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor Igual	Gradiente reducido
E3	Maximizar X1	2	0
F3	Maximizar X2	6	0

Restricciones

Celda	Nombre	Valor Igual	Multiplicador de Lagrange
G6		2	0
G7		12	1.5
G8		18	1

Microsoft Excel 12.0 Informe de límites
Hoja de cálculo: [Libro1]Informe de límites 1
Informe creado: 05/20/2011 08:08:43 a.m.

Celda objetivo		
Celda	Nombre	Igual
G4		36

Celdas cambiantes						
Celda	Nombre	Igual	Límite inferior	Celda objetivo	Límite superior	Celda objetivo
E3	Maximizar X1	2	0	30	2	36
F3	Maximizar X2	6	0	6	6	36

	X1	X2		RHS
Maximize	3	5		
Constraint 1	1	0	<=	4
Constraint 2	0	2	<=	12
Constraint 3	3	2	<=	18

	X1	X2		RHS	Dual
Maximize	3.	5.			
Constraint 1	1.	0.	<=	4.	0.
Constraint 2	0.	2.	<=	12.	1.5
Constraint 3	3.	2.	<=	18.	1.
Solution->	2.	6.		$36.	

(untitled) Solution

Variable	Value	Reduced Cost	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
X1	2.	0.	3.	0.	7.5
X2	6.	0.	5.	2.	Infinity
Constraint	Dual Value	Slack/Surplus	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
Constraint 1	0.	2.	4.	2.	Infinity
Constraint 2	1.5	0.	12.	6.	18.
Constraint 3	1.	0.	18.	12.	24.

	13:40:00		Friday	June	24	2011		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	2.0000	3.0000	6.0000	0	basic	0	7.5000
2	X2	6.0000	5.0000	30.0000	0	basic	2.0000	M
	Objective	Function	(Max.) =	36.0000				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	2.0000	<=	4.0000	2.0000	0	2.0000	M
2	C2	12.0000	<=	12.0000	0	1.5000	6.0000	18.0000
3	C3	18.0000	<=	18.0000	0	1.0000	12.0000	24.0000

(untitled) Solution

Variable	Value	Reduced Cost	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
X1	2.	0.	3.	0.	7.5
X2	6.	0.	5.	2.	Infinity
Constraint	Dual Value	Slack/Surplus	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
Constraint 1	0.	2.	4.	2.	Infinity
Constraint 2	1.5	0.	12.	6.	18.
Constraint 3	1.	0.	18.	12.	24.