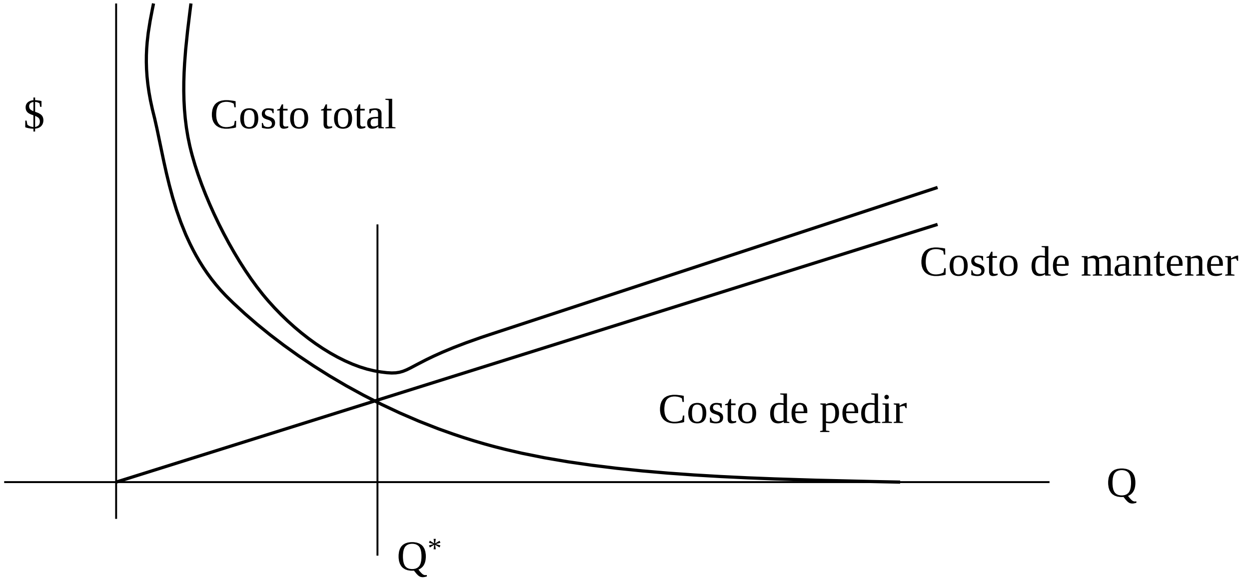
Inventarios

Inventarios

- Los inventarios tienen una gran importancia siempre y cuando estos añadan valor a los procesos.
- La existencia de los inventarios añade valor si estos están disponibles sin generar costos adicionales que muchas veces están ocultos.
- Razones para tener inventarios:
  - Para crear reservas contra imprevistos en la oferta y la demanda
  - Para lograr ventajas en descuentos de cantidad
  - Para disminuir costos de instalación y montaje aprovechando la producción por lotes
  - Para tener reservas que permitan enfrentar demandas estacionales o promociones
  - Para mantener el flujo de productos entre lugares o centros de trabajo
  - Para explotar oportunidades de especulación

Modelos de inventario

- El objetivo es mantener inventarios “justo a tiempo” y no “por si acaso”.
- El énfasis es más en disminuir o eliminar inventarios al minimizar el grado de incertidumbre.
- El objetivo es el de minimizar el costo total de la política de inventario: Costo de Mantener y Costo de Pedir



Costos asociados

- En la política de inventarios:
- Costo de la política = Costo Total de Pedidos + Costo promedio de mantener una unidad

$$C_T = C_p \frac{D}{Q} + C_h \frac{Q}{2}$$

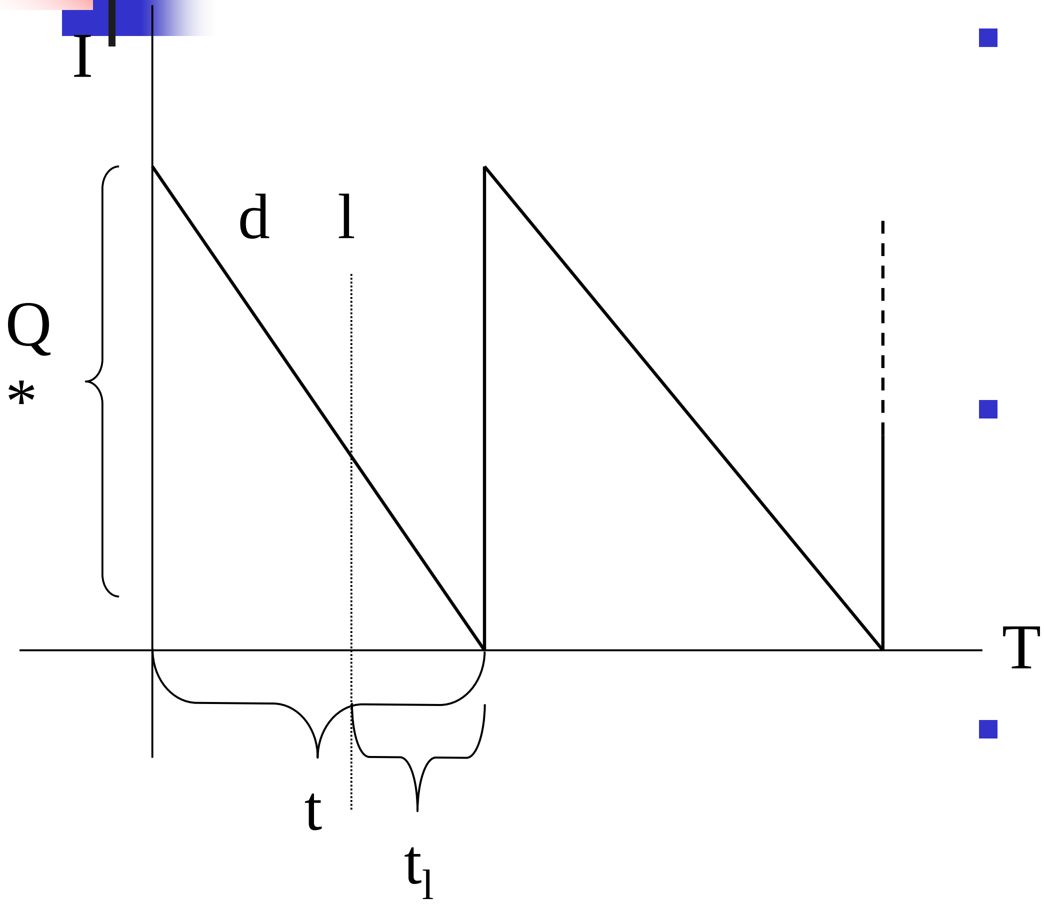
Minimizando C_T en función de Q se tiene que:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_pD}{C_h}}$$

Modelos determinísticos:

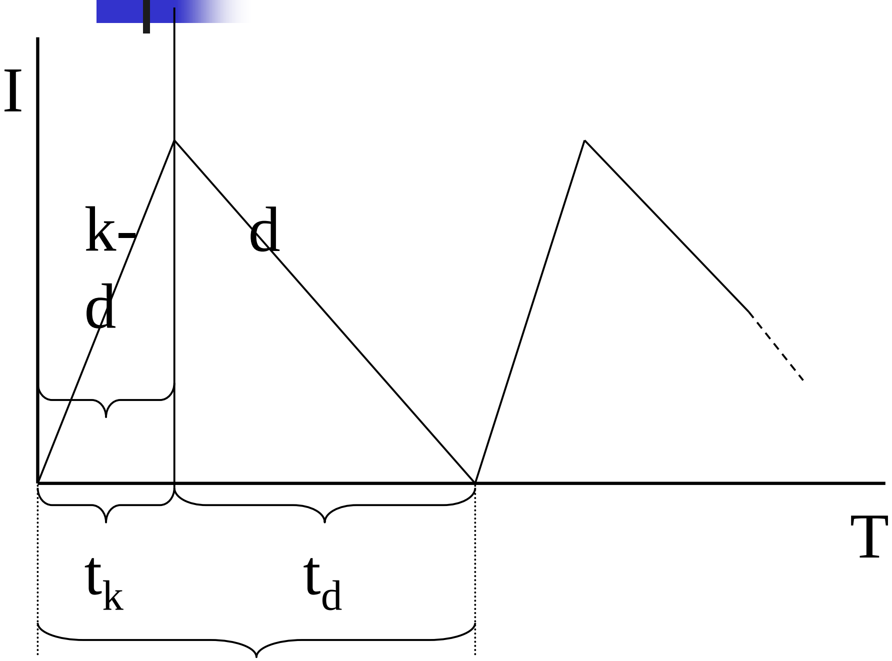
- **Modelo del Tamaño Económico de Lote** (EOQ).
- Este modelo analiza el comportamiento de los inventarios de un producto único basándose en los siguientes supuestos:
  - La demanda es conocida y ocurre a una tasa constante **d** totalizando **D** unidades al año.
  - Cada vez que se hace una orden, el costo de ordenar es constante e igual a **P**
  - Cada orden se recibe a tiempo, o sea no hay tiempo de espera
  - La orden se recibe exactamente cuando el inventario es cero
  - No se permite déficit
  - El costo por unidad por año de mantener el inventario es **H**

Modelo EOQ determinístico



- Al inicio del período de inventario, se reciben **Q*** unidades que son consumidas a una taza **d** cada día en un tiempo de **t** días, momento en el que llega el siguiente pedido.
- Se puede suponer que el pedido demora $\mathbf{t_l}$ días en llegar, por lo que habrá que pedir cuando el nivel de inventario llega al punto de reorden **l**.
- El ciclo se repite indefinidamente o hasta que alguno de los elementos que definió la política de inventario cambie.

EOQ con acumulación progresiva

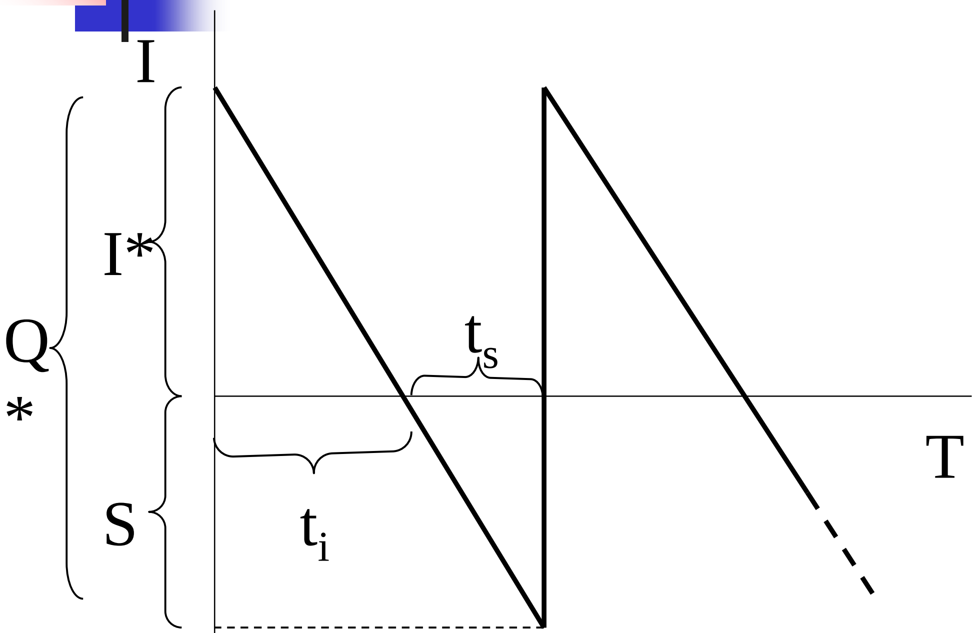


$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_pD}{C_h(1-d/k)}}$$

$$C_T = C_p\frac{D}{Q} + \frac{C_h}{2}Q(1-d/k$$

- Sea **k** la taza de producción tal que **k** > **d** y P el costo de preparar los equipos para iniciar una tanda de producción del lote.
- El lote de tamaño **Q** se acumulará a una taza **k-d** en tiempo **tk**, mientras se consume a una taza **d** en tiempo **td**.
- Finalmente, el tiempo entre ciclos estará dado por **t = tk + td**

Modelo EOQ con faltante



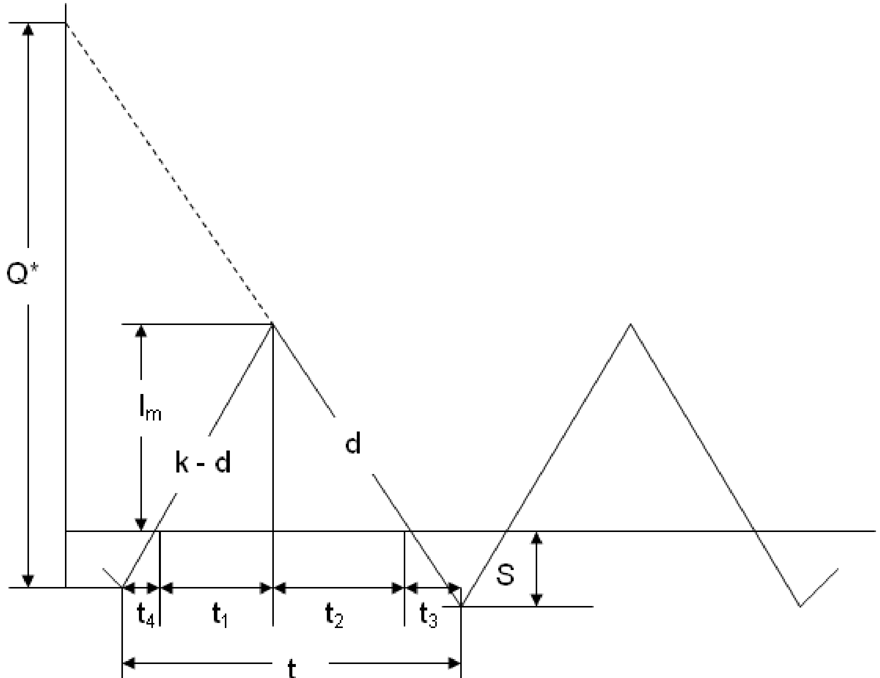
$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_pD}{C_h}\left(\frac{C_h + C_b}{C_b}\right)} \qquad S^* = \sqrt{\frac{2C_pD\,C_h}{(C_b + C_h)C_b}}$$

$$I^* = Q^* - S^*$$

$$C_T = C_p\frac{D}{Q} + C_h\frac{(Q-S)^2}{2Q} + C_b\frac{S^2}{2Q}$$

- En el modelo EOQ original se permite un faltante **S** con un costo de faltante $\mathbf{C_b}$.
- Supóngase también que el pedido total **Q** incluye tanto el inventario **I*** que se consume en tiempo $\mathbf{t_i}$, y el faltante **S** que se acumula durante el tiempo $\mathbf{t_s}$.

gresiva con faltante



$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_pD}{C_h\left(1-\frac{d}{k}\right)}\left(\frac{C_h+C_b}{C_b}\right)} \qquad S^* = \sqrt{\frac{2C_pD\,C_h(1-\frac{d}{k})}{(C_b+C_h)C_b}}$$

$$C_T = C_p\frac{D}{Q^*} + \frac{C_h}{2Q^*(1-d/k)}\left(Q^*(1-d/k)-S\right)^2 + \frac{C_bS^2}{2Q^*(1-d/k)}$$

- En este caso, el inventario máximo $\mathbf{I_m}$ se acumula en un tiempo $\mathbf{t_1 + t_4}$ a una tasa **k – d**.
- A esta tasa se permitirá acumular el déficit **S** y el inventario necesario para cubrir parcialmente las necesidades que se presenten en $\mathbf{t_2}$, mientras que en el tiempo $\mathbf{t_3}$ se volverá a acumular el déficit permitido.
- Los costos de iniciar una tanda **C**, mantener el inventario **H** y déficit **B** son similares a los casos

Ejemplo

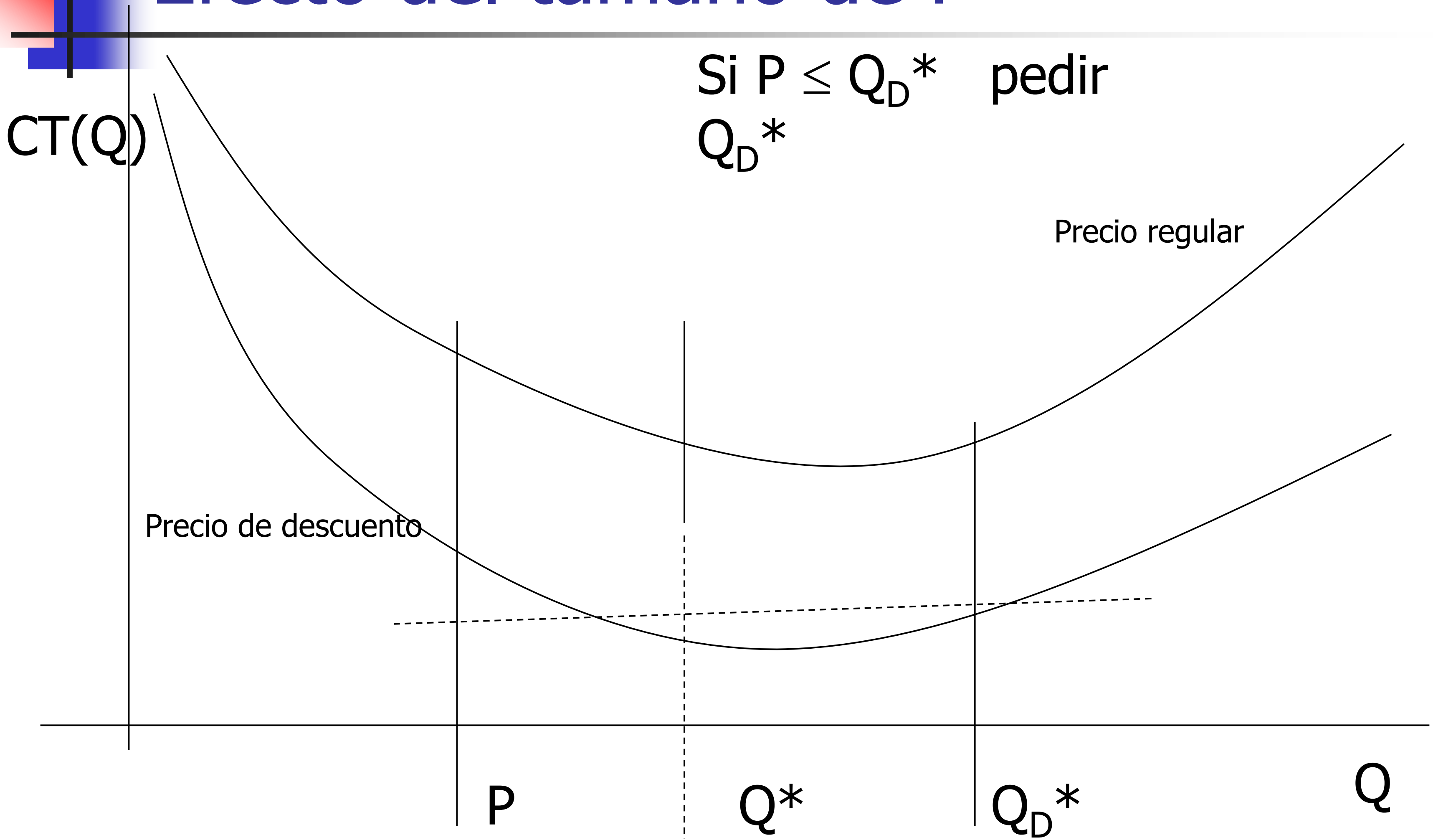
- Supóngase que se tiene un proceso de producción bajo las siguientes características:
- Demanda 15,000 unidades al año
- Costo de iniciar una tanda: 10,000
- Costo de mantener una unidad al año: 20% del costo del producción de una unidad
- El costo de tener faltantes es del 30% del costo del producción de una unidad
- Costo de producción de una unidad: 1,000
- Tasa de producción anual 18,000 unidades

- El departamento de mantenimiento de un hospital cambia luces de neón a una tasa de 100 unidades diarias. Cuesta $100 hacer una orden de compra. Se estima que una luz de neón en el almacén cuesta aproximadamente $0.02 diarios. El tiempo de entrega, considerando el tiempo procesar el pedido y recepción es de 12 días
  - Determine la política óptima de pedido del hospital, considerando el cálculo del lote óptimo, el tiempo de pedido y el punto de reorden (nivel de inventario para hacer el próximo pedido)
  - Presente un bosquejo del comportamiento del inventario ¿Habrán pedidos pendientes dentro del sistema de compras?
  - ¿Cuánto es el costo de la política de inventarios?

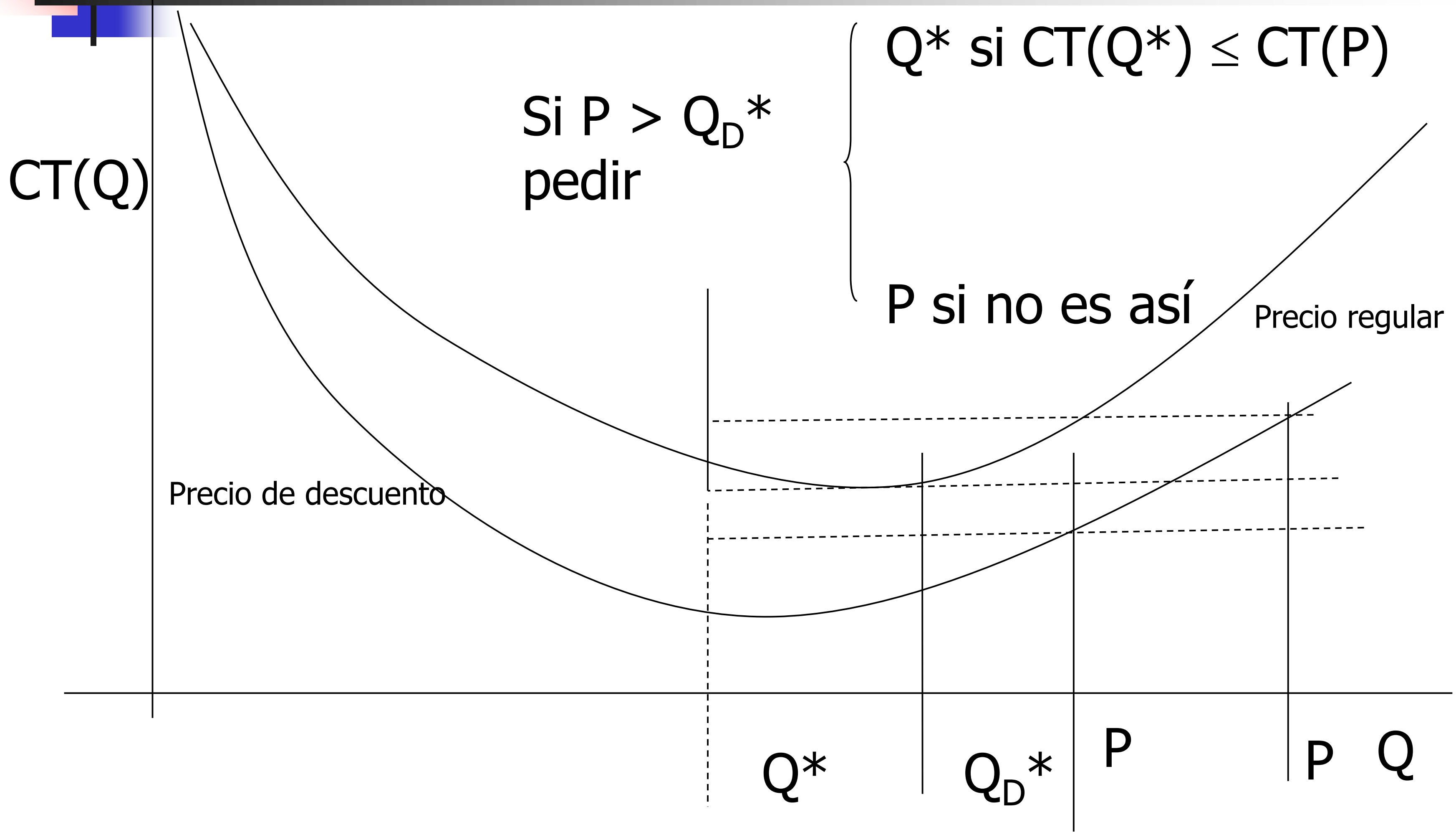
Descuentos por cantidad

- En los modelos anteriores el costo unitario es constante
- El contexto cambia si se ofrecen descuentos por cantidad
- El descuento en general es un porcentaje del precio de compra
- El descuento se ofrece cuando se compra más de cierta cantidad P

Efecto del tamaño de P



Efecto del tamaño de P



Ejemplo

- Supóngase el siguiente caso:
- Demanda de 5000 unidades al año
- Costo unitario $5.00
- Costo de mantener 20% del costo unitario por unidad año
- Costo de pedir $49
- Cuadro de descuento:

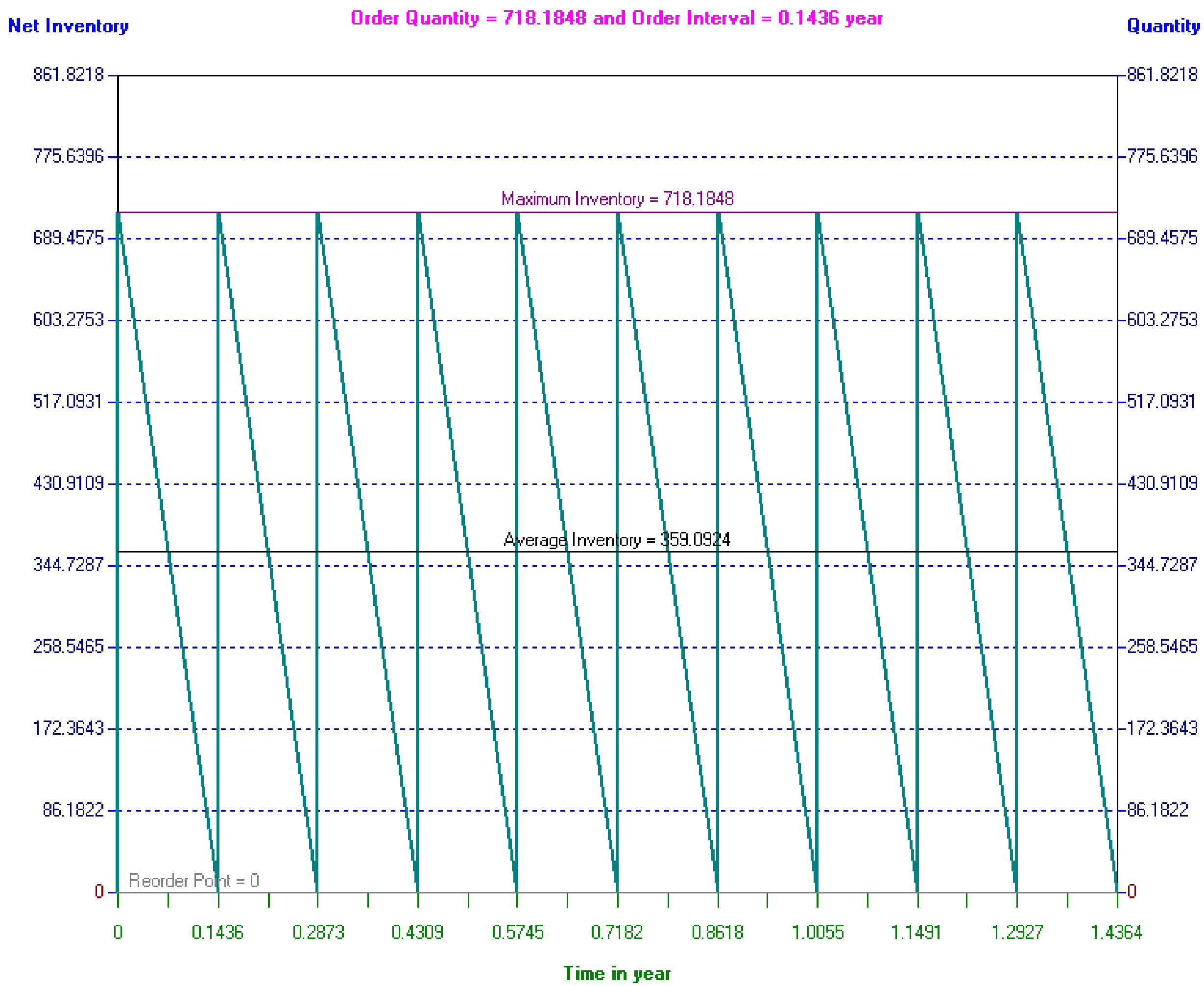
Categoría	Tamaño del lote	Descuento (%)	Costo unitario
1	0 a 999	0	5.00
2	1,000 a 2,499	3	4.85
3	2500 o más	5	4.75

Solución

Categoría	Tamaño del lote	Descuento (%)	Costo unitario	Q*d	Q	C(D)	C(P)	C(H)	CT(Q)
1	0 a 999	0	5	700	700	25,000.00	350.00	350.00	25,700.00
2	1,000 a 2,4999	3	4.85	711	1000	24,250.00	245.00	485.00	24,980.00
3	2500 o más	5	4.75	718	2500	23,750.00	98.00	1,187.50	25,035.50

Política óptima, ordenar 1,000 unidades a un costo total de $24,800 anuales

10-10-2009	Break Qty.	Discount %	EOQ	EOQ Cost	Feasibility	Order Qty.	Total Cost
0	0	0	700	$25700.0000	Yes	700	$25700.0000
1	1000	3	710.7423	$24939.4200	No	1000	$24980.0000
2	2500	5	718.1848	$24432.2800	No	2500	$25035.5000
**	Recommended	Order Qty. =	1000	Discount =	3%	Total Cost =	$24980.0000



EOQ con limitación de espacio de almacenamiento

- El modelo se aplica para el caso de $n > 1$ artículos con comportamiento típico con abastecimiento instantáneo sin faltante.
- Sean:

D_i: la demanda del producto i, para $i = 1, 2, ..., n$

P_i: el costo de procesar un pedido para el proudcto i

H_i: Costo unitario de almacenamiento por unidad de tiempo del producto i

Q^*_i: cantidad óptima de pedido de producto i

a_i: área de almacenamiento necesaria para una unidad de producto i

A: Área total disponible para el almacenamiento de los productos

- El costo total de la política se puede expresar como:

$$C_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{K_i D_i}{Q_i^*} + \frac{H_i Q_i^*}{2} \right)$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i Q_i^* \leq A$$

- Optimizando a través de multiplicadores de Lagrange:

$$Q_i^* = \sqrt{\frac{2P_iD_i}{H_i - 2\lambda a_i}}$$

- Donde el multiplicador de Lagrange $\lambda < 0$ en caso de minimizar
- La minimización debe cumplir que:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i Q_i^* \leq A$$

- EOQ se determina a través de un proceso de ensayo y error.

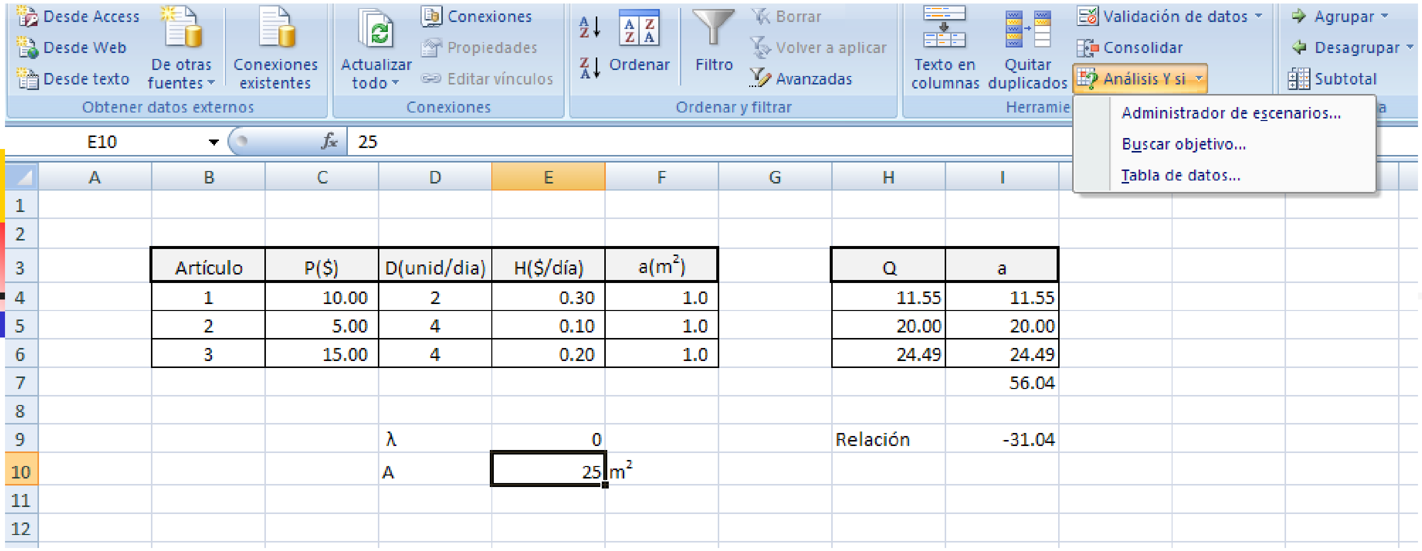
Ejemplo

- Se tiene la siguiente información, donde el área máxima disponible es de $25m^2$. Se requiere encontrar el tamaño óptimo de lote de tal manera que se satisfaga la restricción de área disponible.

Artículo	P($)	D(unid/dia)	H($/día)	$a(m^2)$
1	10.00	2	0.30	1.0
2	5.00	4	0.10	1.0
3	15.00	4	0.20	1.0

- Por ensayo y error se tiene que $\lambda = -0.348$ y,

Q	a
6.34	6.34
7.09	7.09
11.57	11.57



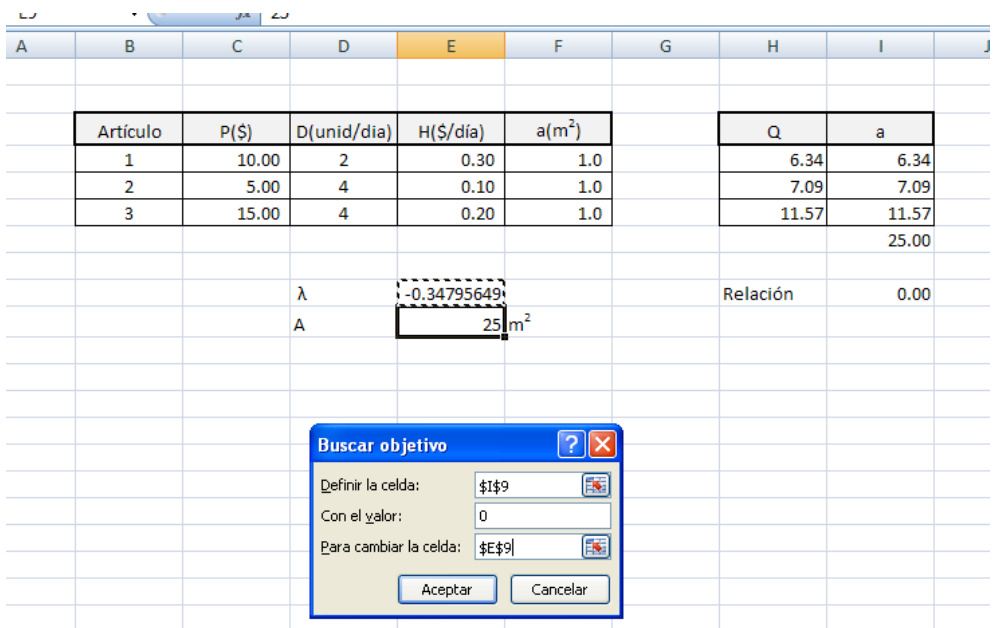
Artículo	P($)	D(unid/dia)	H($/día)	a(m²)
1	10.00	2	0.30	1.0
2	5.00	4	0.10	1.0
3	15.00	4	0.20	1.0

Q	a
11.55	11.55
20.00	20.00
24.49	24.49
	56.04

λ 0

A 25 m²

Relación -31.04



Artículo	P($)	D(unid/dia)	H($/día)	a(m²)
1	10.00	2	0.30	1.0
2	5.00	4	0.10	1.0
3	15.00	4	0.20	1.0

Q	a
6.34	6.34
7.09	7.09
11.57	11.57
	25.00

λ -0.34795649

A 25 m²

Relación 0.00

Modelo estocástico de un solo período

- También conocido como el problema del vendedor de periódico
- La demanda es incierta, con distribución $f(X)$, tal que X es una variable aleatoria representando la demanda donde $D=E(X)$
- Si $Q > E(X)$, hay un costo unitario por excedente $c(o)$, de lo contrario hay un costo unitario $c(u)$ de faltante.
- El objetivo es encontrar $P(X \leq Q)$ y la utilidad de la política correspondiente

Modelo estocástico de un solo período

- Sean
  - Q: cantidad a pedir
  - P: precio de venta
  - C: el costo unitario
  - S: el costo de salvamento
  - B: el costo de déficit
  - c(o): costo unitario incremental del excedente = C – S
  - c(u): costo unitario incremental del faltante = P – C + B

$$P(Q \leq X) = \frac{c(u)}{c(o)+c(u)}$$

$$Q = F^{-1}(X)$$

$$Q = -\lambda \ln\left(1 - \frac{c(u)}{c(o)+c(u)}\right) \text{dist. exponencial}$$

$$Q = \mu \pm z\sigma, \text{ para } z = f\left(\frac{c(u)}{c(o)+c(u)}\right) \text{dist. normal}$$

$$Q = a + (b-a)\left(\frac{c(u)}{c(o)+c(u)}\right) \text{dist. uniforme}$$

$$Utilidad \begin{cases} PX - CQ + S(Q-X) \text{ si } X \leq Q \\ PX - CQ - B(X-Q) \text{ si } X < Q \end{cases}$$

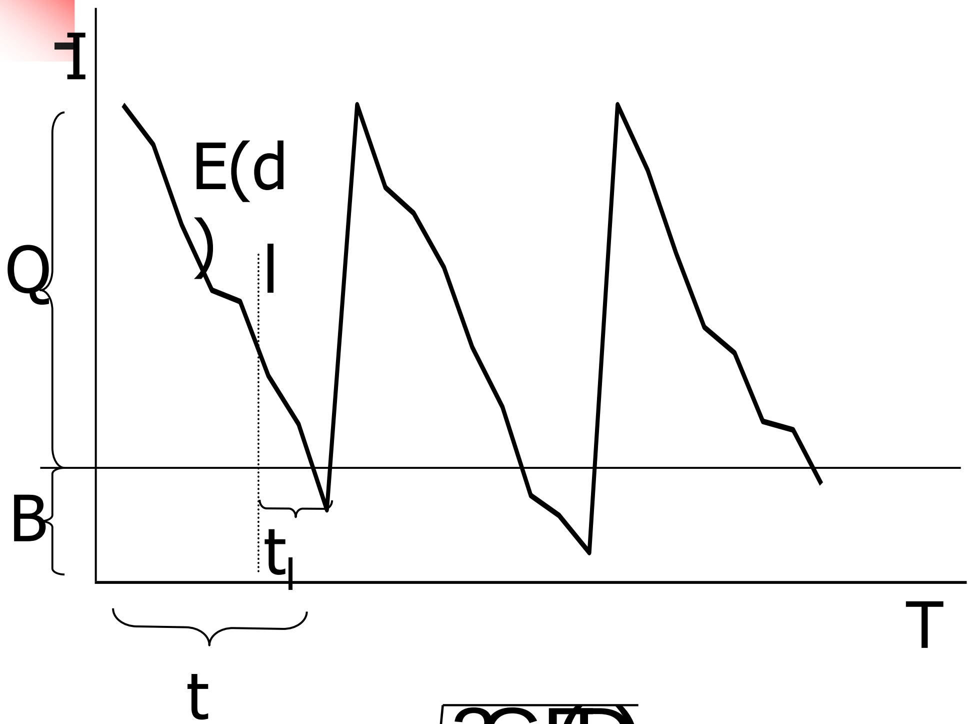
Ejemplo

- Una tienda de zapatos tiene una demanda uniforme de cierto modelo con intervalo entre 350 y 650
- Precio de cada par de zapato 30
- Costo de cada par de zapato 20
- Costo de faltante 10
- Valor de salvamento 10
- Costo de hacer un pedido 30

Reemplazando

- c(o)=10
- c(u)=20
- Distribución uniforme: inventario promedio es de 500 unidades
- $P(X \leq Q) = 0.6667$
- $Q = 350 + (650 - 350)*0.6667 = 550$

Modelos probabilísticos



$$Q^* = \sqrt{\frac{2CE(D)}{H}}$$

- Dos enfoques: el inventario se revisa continuamente, o se asignan cantidades constantes en intervalos de tiempo
- Sea E(**D**) el valor esperado de la demanda total, **E(d)** el valor esperado de la demanda por unidad de tiempo y σ_d su desviación estándar.
- Al ser la demanda variable, hay que considerar que la tasa de agotamiento del inventario varía de tal manera que el consumo del mismo no puede modelarse linealmente.
- Para minimizar la incertidumbre, se incluye un inventario de seguridad **B.**

$$B = z_\alpha \sigma_d \sqrt{t_l}$$

$l = B + d_l$

$d_l = E(d)t_l$

Ejemplo

- Demanda diaria: normalmente distribuida con media 1,000 y σ de 200
- C_p:100
- C_h: 1
- Días de trabajo 300
- t_l :15 dias
- α=95%

Enfoques heurísticos para períodos múltiples

- Programación dinámica para encontrar el tamaño del lote
- Basados en la formulación:

$$Min \quad \sum_{t=1}^{m} \left(vc_t x_t + sc_t y_t + hc_t s_t \right)$$

$$s.t. \quad s_{t-1} + x_t = d_t + s_t \qquad \forall t \in T$$

$$x_t \le sd_{tm} y_t \qquad \forall t \in T$$

$$x_t, s_t \ge 0;\ y_t \in \{0,1\} \qquad \forall t \in T$$

Donde, para cualquier período t:

d_t : demanda

x_t : nivel de producción

y_t : nueva tanda o pedido

s_t : nivel de inventario

vc_t: es el costo unitario

sc_t: costo de pedir o de iniciar la tanda

hc_t: costo promedio de mantener

sd_t: inventario acumulado en t

T : horizonte de planeación.

T = 1, 2, …, t, t+1, t+2, …, m

Enfoques heurísticos para períodos múltiples

- Fue resuelto por primera vez por Wagner y Whitin en 1958
- Utiliza un enfoque de programación dinámica buscando un balance del costo óptimo por período.
- Existen diferentes heurísticas, WinQSB presenta 10 de ellas.