Diseño de experimentos - Experimentos con más de un factor

http://www.academia.utp.ac.pa/humberto-alvarez/diseno-de-experimentos-y-regresion

Diseño de bloques completamente al azar DBCA

- Cuando se quieren comparar ciertos tratamientos o estudiar el efecto de un factor, es deseable que las posibles diferencias se deban principalmente al factor de interés y no a otros factores que no se consideran en el estudio.
- Cuando esto no ocurre y existen otros factores que no se controlan o nulifican para hacer la comparación, las conclusiones podrían ser afectadas sensiblemente.
- El diseño en bloques completos al azar trata de comparar tres fuentes de variabilidad:
  - el factor de tratamientos,
  - el factor de bloques y
  - el error aleatorio.
- El adjetivo completo se refiere a que en cada bloque se prueban todos los tratamientos. La aleatorización se hace dentro de cada bloque.

Factores de bloque

- Son los factores adicionales al factor de interés que se incorporan de manera explícita en un experimento comparative.
- Se incluyen en el experimento no para analizar su efecto, sino como un medio para estudiar de manera adecuada y eficaz al factor de interés.
- Los factores de bloque entran al estudio en un nivel de importancia secundaria con respecto al factor de interés y, en este sentido, se puede afirmar que se estudia un solo factor, porque es uno el factor de interés.

Modelo estadístico:

Tratamiento	Bloque					
		1	2	3	...	b
	1	Y_{11}	Y_{12}	Y_{13}	...	Y_{1b}
	2	Y_{21}	Y_{22}	Y_{23}	...	Y_{2b}
	3	Y_{31}	Y_{32}	Y_{33}	...	Y_{3b}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	k	Y_{k1}	Y_{k2}	Y_{k3}	...	Y_{kb}

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \gamma_j + \varepsilon_{ij}; \begin{Bmatrix} i = 1, 2, \ldots, k \\ j = 1, 2, \ldots, b \end{Bmatrix}$$

Hipótesis a probar:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_k = \mu$$
$$H_A : \mu_i \neq \mu_j \text{ para algún } i \neq j$$

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \ldots = \tau_k = 0$$
$$H_A : \tau_i \neq 0 \text{ para algún } i$$

ANOVA

- La hipótesis dada se prueba con un *análisis de varianza con dos criterios de clasificación*, porque se controlan dos fuentes de variación:
  - el factor de tratamientos y el factor de bloque.

Fuente de variabilidad	Suma de cuadrados	Grado de libertad	Cuadrado medio	F_0	Valor-p
Tratamientos	SC_{TRAT}	$k-1$	CM_{TRAT}	$F_0 = \frac{CM_{TRAT}}{CM_E}$	$P(F > F_0)$
Bloques	SC_B	$b-1$	CM_B	$F_0 = \frac{CM_B}{CM_E}$	$P(F > F_0)$
Error	SC_E	$(k-1)(b-1)$	CM_E		
Total	SC_T	$N-1$			

$$SC_T = \sum_{j=1}^{b} \sum_{i=1}^{k} Y_{ij}^2 - \frac{Y_{\bullet\bullet}^2}{N}$$

$$SC_{TRAT} = \sum_{i=1}^{k} \frac{Y_{i\bullet}^2}{b} - \frac{Y_{\bullet\bullet}^2}{N}$$

$$SC_B = \sum_{j=1}^{b} \frac{Y_{\bullet j}^2}{k} - \frac{Y_{\bullet\bullet}^2}{N}$$

$$SC_E = SC_T - SC_{TRAT} - SC_B$$

Ejemplo:

- Se plantean cuatro métodos de ensamblaje, que son ejecutados por cuatro operadores. La tabla muestra los tiempos de ensamblaje en minutos:

Método	Operador			
	1	**2**	**3**	**4**
A	6	9	7	8
B	7	10	11	8
C	10	6	11	14
D	10	13	11	9

- ¿Habrá diferencias significativas entre operadores y métodos?

$$H_0 : \mu_A = \mu_B = \mu_C = \mu_D = \mu$$

$$H_A : \mu_i \neq \mu_j \text{ para algún } i \neq j = A, B, C, D$$

Caso	Met_ensamble	Operador	Tiempo_min
1	A	O1	6
2	A	O2	9
3	A	O3	7
4	A	O4	8
5	B	O1	7
6	B	O2	10
7	B	O3	11
8	B	O4	8
9	C	O1	10
10	C	O2	6
11	C	O3	11
12	C	O4	14
13	D	O1	10
14	D	O2	13
15	D	O3	11
16	D	O4	9

Análisis de la varianza

Variable	N	R^2	R^2 Aj	CV
Tiempo min	16	0.40	0.00	24.95

Cuadro de Análisis de la Varianza (SC tipo III)

F.V.	SC	gl	CM	F	p-valor
Modelo.	32.50	6	5.42	0.99	0.4851
Operador	7.25	3	2.42	0.44	0.7289
Met_ensamble	25.25	3	8.42	1.54	0.2707
Error	49.25	9	5.47		
Total	81.75	15			

Test:LSD Fisher Alfa=0.05 DMS=3.74188

Error: 5.4722 gl: 9

Operador	Medias	n	E.E.	
O3	10.00	4	1.17	A
O4	9.75	4	1.17	A
O2	9.50	4	1.17	A
O1	8.25	4	1.17	A

Medias con una letra común no son significativamente diferentes ($p > 0.05$)

Test:LSD Fisher Alfa=0.05 DMS=3.74188

Error: 5.4722 gl: 9

Met_ensamble	Medias	n	E.E.	
D	10.75	4	1.17	A
C	10.25	4	1.17	A
B	9.00	4	1.17	A
A	7.50	4	1.17	A

Medias con una letra común no son significativamente diferentes ($p > 0.05$)

Diseño de Cuadro Latino (DCL)

- Diseño en el que se controlan dos factores de bloque y uno de tratamientos.
- Los tres factores tienen la misma cantidad de niveles.
- Se tienen cuatro fuentes de variabilidad que pueden afectar la respuesta observada, éstas son:
  - los tratamientos, el factor de bloque I (columnas), el factor de bloque II (renglones) y el error aleatorio.
- Se llama *cuadro latino* por dos razones:
  - Es un *cuadro* debido a que tiene la restricción adicional de que los tres factores involucrados se prueban en la misma cantidad de niveles,
  - ES *latino* porque se utilizan letras latinas para denotar a los tratamientos o niveles del factor de interés.

- Sean *A*, *B*, *C*, *...*, *K*, los *k* tratamientos a comparar, por lo tanto ambos factores de bloques tienen también *k nivel*es cada uno.
- De manera general el cuadro se verá como sigue:

		Bloque II (columnas)				
		1	2	3	...	k
Bloque I (renglones)	1	$A = Y_{111}$	$B = Y_{212}$	$C = Y_{313}$	...	$K = Y_{k1k}$
	2	$B = Y_{221}$	$C = Y_{322}$	$D = Y_{423}$	...	$A = Y_{12k}$
	3	$C = Y_{331}$	$D = Y_{432}$	$E = Y_{533}$	...	$B = Y_{23k}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	k	$K = Y_{kk1}$	$A = Y_{1k2}$	$B = Y_{2k3}$	...	$J = Y_{jkk}$

Análisis del diseño

- El modelo estadístico para describir el comportamiento está dado por:

$$Y_{ijl} = \mu + \tau_i + \gamma_j + \delta_l + \varepsilon_{ijl}$$

- Donde Y_{ijl} es la observación del tratamiento i, en el nivel j del renglón del factor correspondiente y en el nivel l de la columna del factor respectivo.
- ε_{ijl} corresponde al error aleatorio de la observación.

El ANOVA para el DCL

Fuente de variabilidad	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	F_0	Valor-p
Tratamientos	SC_{TRAT}	$k-1$	CM_{TRAT}	$F_0 = \frac{CM_{TRAT}}{CM_E}$	$P(F > F_0)$
Renglones	SC_{B1}	$k-1$	CM_{B1}	$F_0 = \frac{CM_B}{CM_E}$	$P(F > F_0)$
Columnas	SC_{B2}	$k-1$	CM_{B2}	$F_0 = \frac{CM_{B2}}{CM_E}$	$P(F > F_0)$
Error	SC_E	$(k-2)(k-1)$	CM_E		
Total	SC_T	k^2-1			

Ejemplo:

Una compañía está interesada en determinar cuál marca de llantas tiene mayor duración en términos del desgaste.

Para ello se plantea un experimento en el que se comparan las cuatro marcas de llantas sometiéndolas a una prueba de 32 000 kilómetros de recorrido, utilizando cuatro diferentes tipos de auto y las cuatro posiciones posibles de las llantas en el auto.

Así, el factor de interés es el *tipo de llanta* o *marca*, y se controlan dos factores de bloques: el *tipo de carro* y la *posición de la llanta en el carro.*

Se mide la diferencia máxima entre el grosor de la llanta nueva y el grosor de la llanta después de haber recorrido los 32 000 kilómetros.

A mayor diferencia en grosor mayor desgaste. Las unidades de medición son milésimas de pulgada.

Las pruebas se hacen al mismo tiempo con conductores, a quienes se les instruye para que manejen de manera similar sobre el mismo terreno para los cuatro automóviles.

Resultados de las pruebas:

Posición	Marca			
	M1	**M2**	**M3**	**M4**
AI	C = 12	D = 11	A = 13	B = 8
AD	B = 14	C = 12	D = 11	A = 15
TI	A = 17	B = 14	C = 10	D = 9
TD	D = 13	A = 14	B = 13	C = 9

Caso	Posición	Marca de Auto	Marca de Llanta	e en milésimas de p
2	AI	M2	D	11
3	AI	M3	A	13
4	AI	M4	B	8
5	AD	M1	B	14
6	AD	M2	C	12
7	AD	M3	D	11
8	AD	M4	A	15
9	TI	M1	A	17
10	TI	M2	B	14
11	TI	M3	C	10
12	TI	M4	D	9
13	TD	M1	D	13
14	TD	M2	A	14
15	TD	M3	B	13
16	TD	M4	C	9

Análisis de la varianza

Variable	N	R²	R² Aj	CV
Desgaste en milésimas de p..	16	0.89	0.73	10.26

Datos desbalanceados en celdas.
Para otra descomposición de la SC
especifique los contrastes apropiados.. !!

Cuadro de Análisis de la Varianza (SC tipo I)

F.V.	SC	gl	CM	F	p-valor
Modelo.	79.06	9	8.78	5.62	0.0240
Posición	8.69	3	2.90	1.85	0.2383
Marca de Auto	30.19	3	10.06	6.44	0.0264
Marca de Llanta	40.19	3	13.40	8.57	0.0137
Error	9.38	6	1.56		
Total	88.44	15			

Test:LSD Fisher Alfa=0.05 DMS=2.16278

Error: 1.5625 gl: 6

Posición	Medias	n	E.E.	
AD	13.00	4	0.63	A
TI	12.50	4	0.63	A
TD	12.25	4	0.63	A
AI	11.00	4	0.63	A

Medias con una letra común no son significativamente diferentes (p > 0.05)

Test:LSD Fisher Alfa=0.05 DMS=2.16278

Error: 1.5625 gl: 6

Marca de Auto	Medias	n	E.E.			
M1	14.00	4	0.63	A		
M2	12.75	4	0.63	A	B	
M3	11.75	4	0.63		B	C
M4	10.25	4	0.63			C

Medias con una letra común no son significativamente diferentes (p > 0.05)

Test:LSD Fisher Alfa=0.05 DMS=2.16278

Error: 1.5625 gl: 6

Marca de Llanta	Medias	n	E.E.		
A	14.75	4	0.63	A	
B	12.25	4	0.63		B
D	11.00	4	0.63		B
C	10.75	4	0.63		B

Medias con una letra común no son significativamente diferentes (p > 0.05)

Selección y aleatorización de un cuadro latino

- No cualquier arreglo de letras latinas en forma de cuadro es un cuadro latino.
- La regla fundamental es que cada letra debe aparecer sólo una vez en cada renglón y en cada columna.
- Siempre es fácil construir un *cuadro latino estándar,* en el que en la primera columna y en el primer renglón aparecen las letras en orden alfabético.

Un caso estándar

A	*B*	*C*	*D*
B	*C*	*D*	*A*
C	*D*	*A*	*B*
D	*A*	*B*	*C*

Otros ejemplos de cuadros estándar

A	*B*	*C*	*D*
B	*A*	*D*	*C*
C	*D*	*B*	*A*
D	*C*	*A*	*B*

A	*B*	*C*	*D*
B	*D*	*A*	*C*
C	*A*	*D*	*B*
D	*C*	*B*	*A*

A	*B*	*C*	*D*
B	*A*	*D*	*C*
C	*D*	*A*	*B*
D	*C*	*B*	*A*

- Para cuatro tratamientos se pueden construir un total de 576 cuadros latinos, de los cuales *cuatro* son estándar.
- La selección del diseño debería ser elegir uno al azar de los 576 posibles; no obstante, es prácticamente imposible construir todos para seleccionar uno al azar.
- El cuadro latino tiene dos restricciones a la aleatorización que se deben a los dos factores de bloque, lo cual implica que a la hora de correr el experimento no hay ningún margen de aleatorización.
- Es decir, se puede correr por columna o por renglón según convenga, pero no hacer todas las pruebas de los factores de manera sucesiva, evitando introducir ruido adicional debido a factores no controlables que cambian con el tiempo.

Diseño en cuadro grecolatino (DCGL)

- Diseño en el que se controlan tres factores de bloques y un factor de tratamiento.
- Los cuatro factores utilizan la misma cantidad de niveles.
- Se utilizan letras latinas para denotar a los tratamientos y letras griegas para nombrar a los niveles del tercer
- factor de bloque.
- Al igual que en el cuadro latino, cada letra (latinas y griegas) debe aparecer sólo una vez en cada renglón y en cada columna.
- Cada par de letras debe aparecer sólo una vez en todo el arreglo.

		Columnas			
		1	2	3	4
Renglones	1	$A\alpha$	$B\beta$	$C\gamma$	$D\delta$
	2	$B\delta$	$A\gamma$	$D\beta$	$C\alpha$
	3	$C\beta$	$D\alpha$	$A\delta$	$B\gamma$
	4	$D\gamma$	$C\delta$	$B\alpha$	$A\beta$

El modelo estadístico del DCGL

- El modelo estadístico que describe a las mediciones está dado por:

$$Y_{ijlm} = \mu + \tau_i + \gamma_j + \delta_l + \varphi_m + \varepsilon_{ijlm}$$

- Donde Y_{ijlm} es la observación o respuesta que se encuentra en el tratamiento i , en el renglón j, en la columna l y en la m-ésima letra griega
- τ_i es el efecto del tratamiento i,
- γ_j es el efecto del renglón j,
- δl representa el efecto de la columna l
- y φ_m representa el efecto de la m-ésima letra griega, que son los niveles del tercer factor de bloque;
- El término ε_{ijlm} representa el error aleatorio atribuible a la medición Y_{ijlm}

ANOVA para el DCGL

Fuente de variabilidad	Suma de cuadrados	Grados de libertad
Tratamientos (letras latinas)	$SC_{TRAT} = \sum_{i=1}^{k} \frac{Y_{i\bullet\bullet\bullet}^2}{k} - \frac{Y_{\bullet\bullet\bullet\bullet}^2}{N}$	$k-1$
Factor de bloque I (renglones)	$SC_{B1} = \sum_{j=1}^{k} \frac{Y_{\bullet j\bullet\bullet}^2}{k} - \frac{Y_{\bullet\bullet\bullet\bullet}^2}{N}$	$k-1$
Factor de bloque II (columnas)	$SC_{B2} = \sum_{l=1}^{k} \frac{Y_{\bullet\bullet l\bullet}^2}{k} - \frac{Y_{\bullet\bullet\bullet\bullet}^2}{N}$	$k-1$
Factor de bloque III (letras griegas)	$SC_{B3} = \sum_{m=1}^{k} \frac{Y_{\bullet\bullet\bullet m}^2}{k} - \frac{Y_{\bullet\bullet\bullet\bullet}^2}{N}$	$k-1$
Error	$SC_E = SC_T - SC_{TRAT} - SC_{B1} - SC_{B2} - SC_{B3}$	$(k-3)(k-1)$
Total	$SC_T = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{k} \sum_{m=1}^{k} Y_{ijlm}^2 - \frac{Y_{\bullet\bullet\bullet\bullet}^2}{N}$	k^2-1

Ejemplo

- En el caso donde se comparan cuatro métodos de ensamble y se tiene el factor de bloque operador, se tienen dos factores de bloque adicionales:
  - orden en el se hace el ensamble;
  - lugar donde se hace.

		Operador			
		1	2	3	4
Orden del ensamble	1	$C\beta = 10$	$B\gamma = 10$	$D\delta = 12$	$A\alpha = 7$
	2	$B\alpha = 8$	$C\delta = 15$	$A\gamma = 7$	$D\beta = 14$
	3	$A\delta = 6$	$D\alpha = 14$	$B\beta = 11$	$C\gamma = 13$
	4	$d\gamma = 11$	$A\beta = 8$	$C\alpha = 10$	$B\delta = 8$

Caso	Orden	Operador	Metodo	Lugar	Tiempo
1	N1	O1	C	b	10.00
2	N1	O2	B	g	10.00
3	N1	O3	D	d	12.00
4	N1	O4	A	a	7.00
5	N2	O1	B	a	8.00
6	N2	O2	C	d	15.00
7	N2	O3	A	g	7.00
8	N2	O4	D	b	14.00
9	N3	O1	A	d	6.00
10	N3	O2	D	a	14.00
11	N3	O3	B	b	11.00
12	N3	O4	C	g	13.00
13	N4	O1	D	g	11.00
14	N4	O2	A	b	8.00
15	N4	O3	C	a	10.00
16	N4	O4	B	d	8.00

Análisis de la varianza

Variable	N	R²	R² Aj	CV
Tiempo	16	0.97	0.85	10.54

Datos desbalanceados en celdas.
Para otra descomposición de la SC
especifique los contrastes apropiados.. !!

Cuadro de Análisis de la Varianza (SC tipo I)

F.V.	SC	gl	CM	F	p-valor
Modelo.	113.50	12	9.46	8.11	0.0555
Orden	9.50	3	3.17	2.71	0.2170
Operador	18.50	3	6.17	5.29	0.1024
Metodo	83.50	3	27.83	23.86	0.0135
Lugar	2.00	3	0.67	0.57	0.6714
Error	3.50	3	1.17		
Total	117.00	15			

Test:LSD Fisher Alfa=0.05 DMS=2.43063

Error: 1.1667 gl: 3

Orden	Medias	n	E.E.	
N3	11.00	4	0.54	A
N2	11.00	4	0.54	A
N1	9.75	4	0.54	A
N4	9.25	4	0.54	A

Medias con una letra común no son significativamente diferentes (p > 0.05)

Test:LSD Fisher Alfa=0.05 DMS=2.43063

Error: 1.1667 gl: 3

Metodo	Medias	n	E.E.		
D	12.75	4	0.54	A	
C	12.00	4	0.54	A	
B	9.25	4	0.54		B
A	7.00	4	0.54		B

Medias con una letra común no son significativamente diferentes (p > 0.05)

Test:LSD Fisher Alfa=0.05 DMS=2.43063

Error: 1.1667 gl: 3

Operador	Medias	n	E.E.		
O2	11.75	4	0.54	A	
O4	10.50	4	0.54	A	B
O3	10.00	4	0.54	A	B
O1	8.75	4	0.54		B

Medias con una letra común no son significativamente diferentes (p > 0.05)

Test:LSD Fisher Alfa=0.05 DMS=2.43063

Error: 1.1667 gl: 3

Lugar	Medias	n	E.E.	
b	10.75	4	0.54	A
g	10.25	4	0.54	A
d	10.25	4	0.54	A
a	9.75	4	0.54	A

Medias con una letra común no son significativamente diferentes (p > 0.05)