



# Casos especiales de Programación Lineal





# Análisis de Datos por Envolverte

## Data Envelopment Analysis





# Contexto del problema

---



- Medir eficiencia de múltiples alternativas
- Un solo estado de la naturaleza
- Un solo criterio: eficiencia
- Múltiples variables dentro del criterio





# Objetivo

---



- Comparar eficiencias productivas en Unidades de Decisión (DMU)
- La comparación se hace en función al uso de insumos de manera óptima creando una unidad eficiente ideal



# Eficiencia de Pareto - Koopman



- Una unidad de decisión (DMU) no es eficiente al producir sus bienes o servicios (a partir de una cantidad de insumos) si se puede demostrar que una redistribución de sus recursos resultaría en una igual producción con una utilización menor de sus insumos y sin el uso de ningún recurso adicional. Por el contrario, la firma será eficiente si esto no es posible



# La función de producción eficiente



De acuerdo a Farrell, la función de producción:

- $Y_0 = Y(y_1, y_2, \dots, y_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$

Es eficiente, si cualquier otro vector  $Y_i$  produce los mismos elementos de tal manera que

- $Y_i \leq Y_0 \forall y, x$

$Y_i$  es factible si esto es posible



# Características de la función eficiente



■ **Convexidad:** Está compuesta de segmentos de línea que unen ciertos pares de puntos escogidos de un conjunto de puntos  $(0, \infty)$ ;  $(\infty, 0)$ ... que satisfaga dos condiciones:

- Que su pendiente no sea positiva
- Que ningún punto observado se encuentre entre la función y su origen

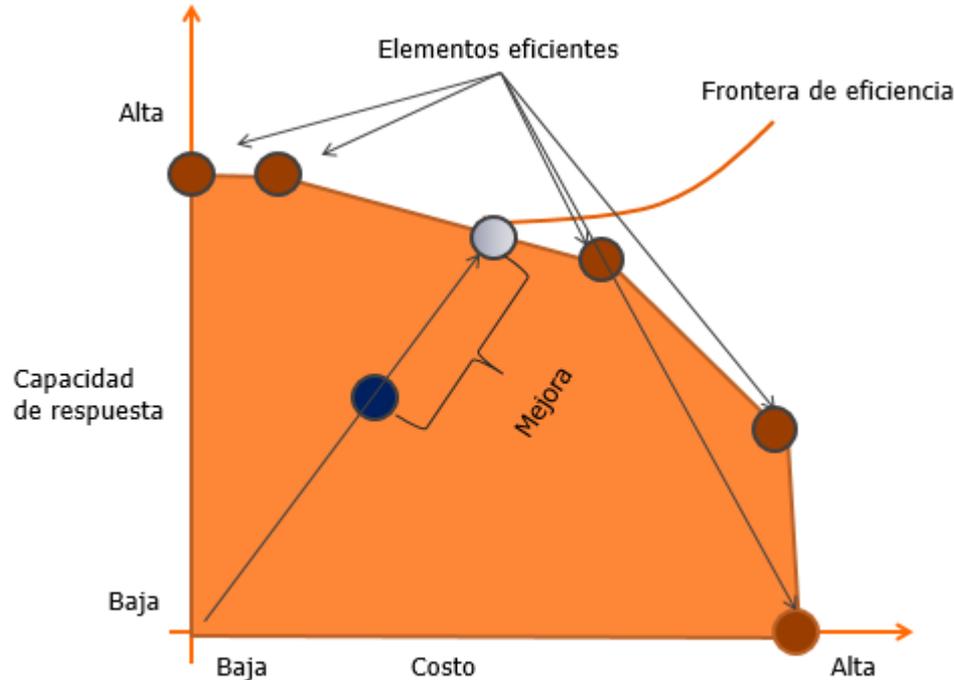
■ **Retornos constantes a escala:** Un aumento (disminución) en insumos, genera un aumento (disminución) en la producción

Estas condiciones garantizan que si dos puntos son posibles en la práctica, entonces lo será cualquier punto obtenido del promedio ponderado de los anteriores.

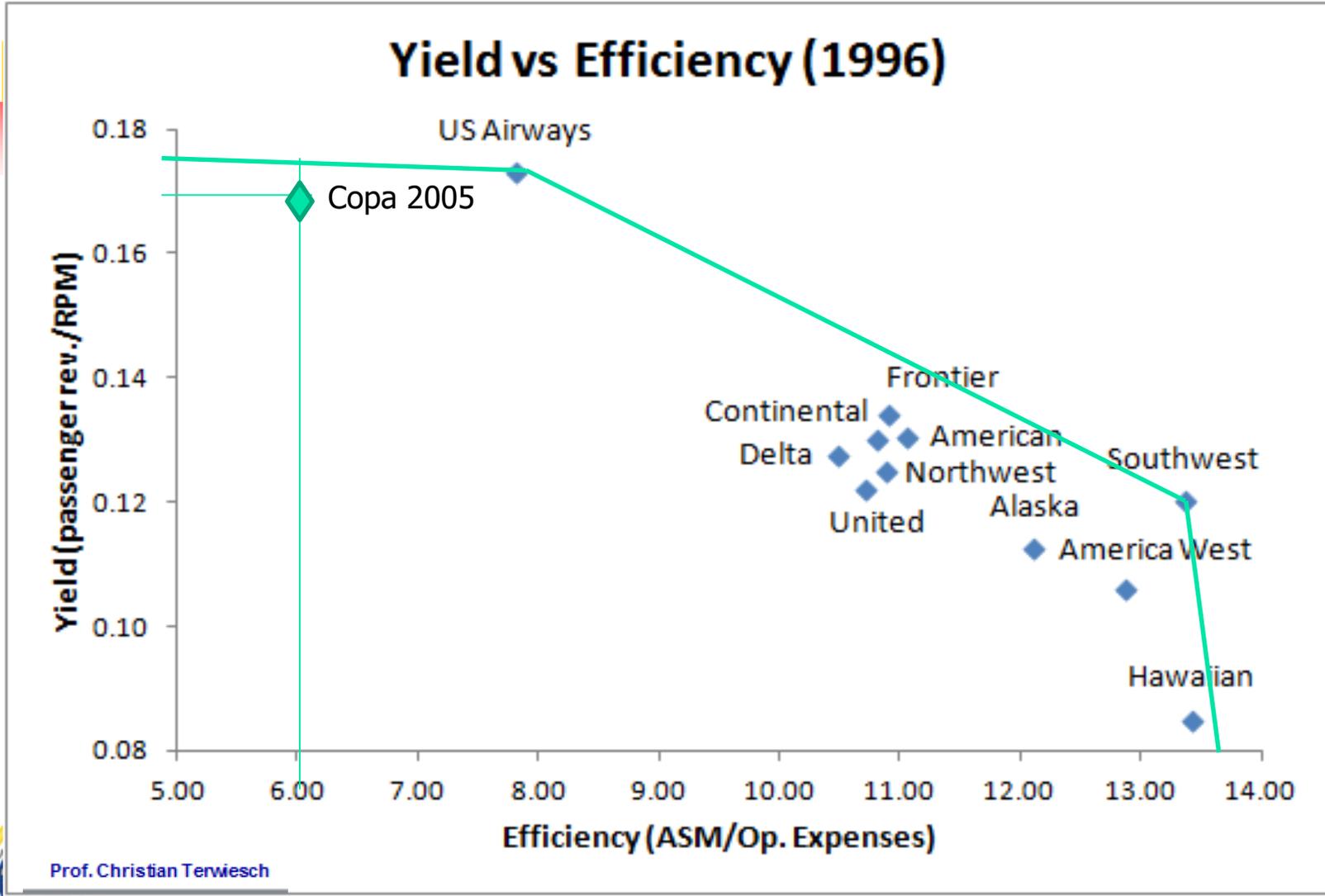


## ■ Frontera de eficiencia:

- Existe una frontera donde para poder ser más eficiente hay que poder producir más con igual cantidad de recursos o producir igual con menos recursos. Lo ideal es que las cadenas estén en la frontera de eficiencia.



# Ejemplo: la industria aérea



Prof. Christian Terwiesch

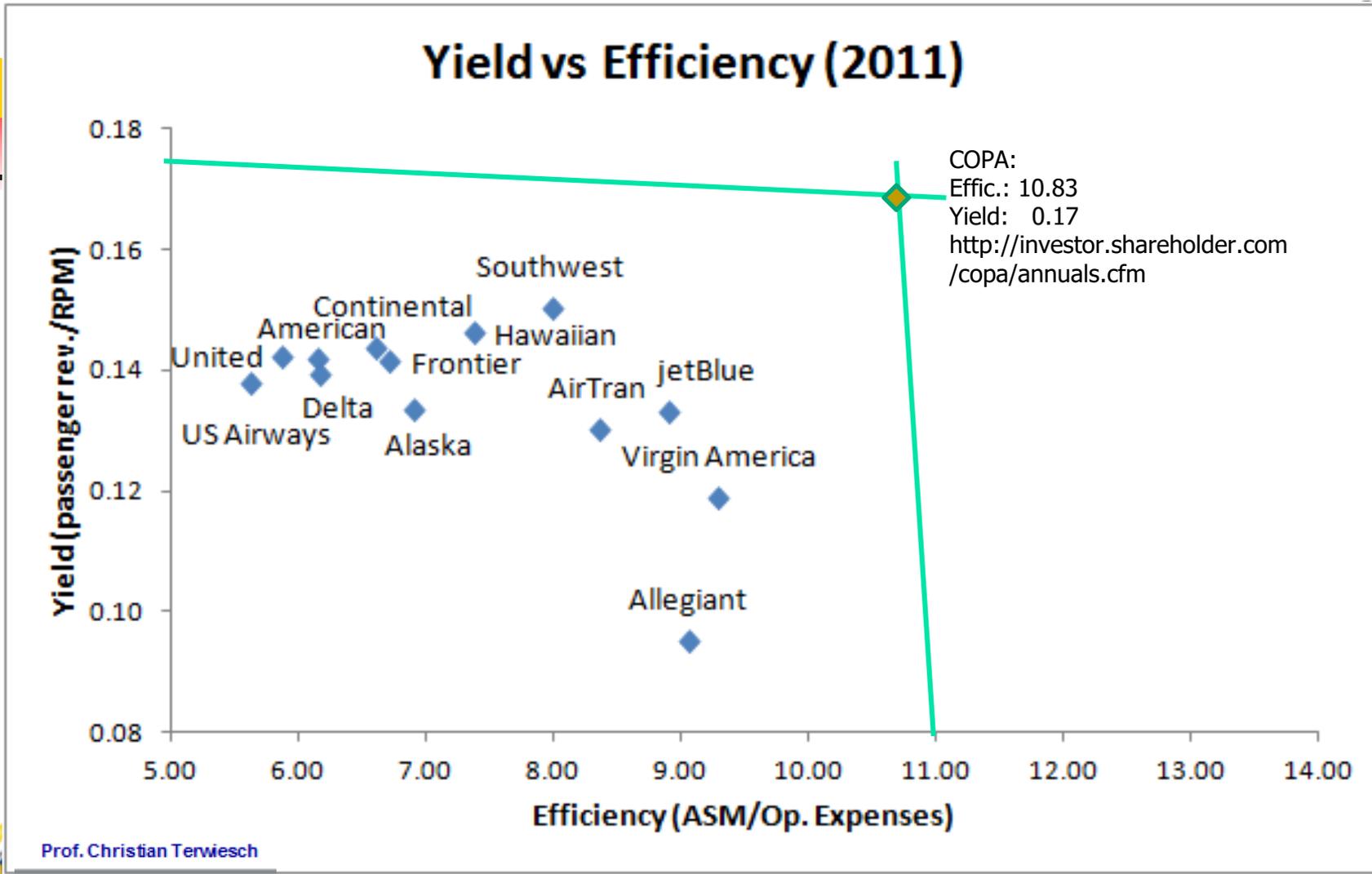
(ASM: Available seat miles; RPM: Revenue passenger mile)

H. R. Alvarez A., Ph.D.

D.



# Ejemplo: la industria aérea



Prof. Christian Terwiesch

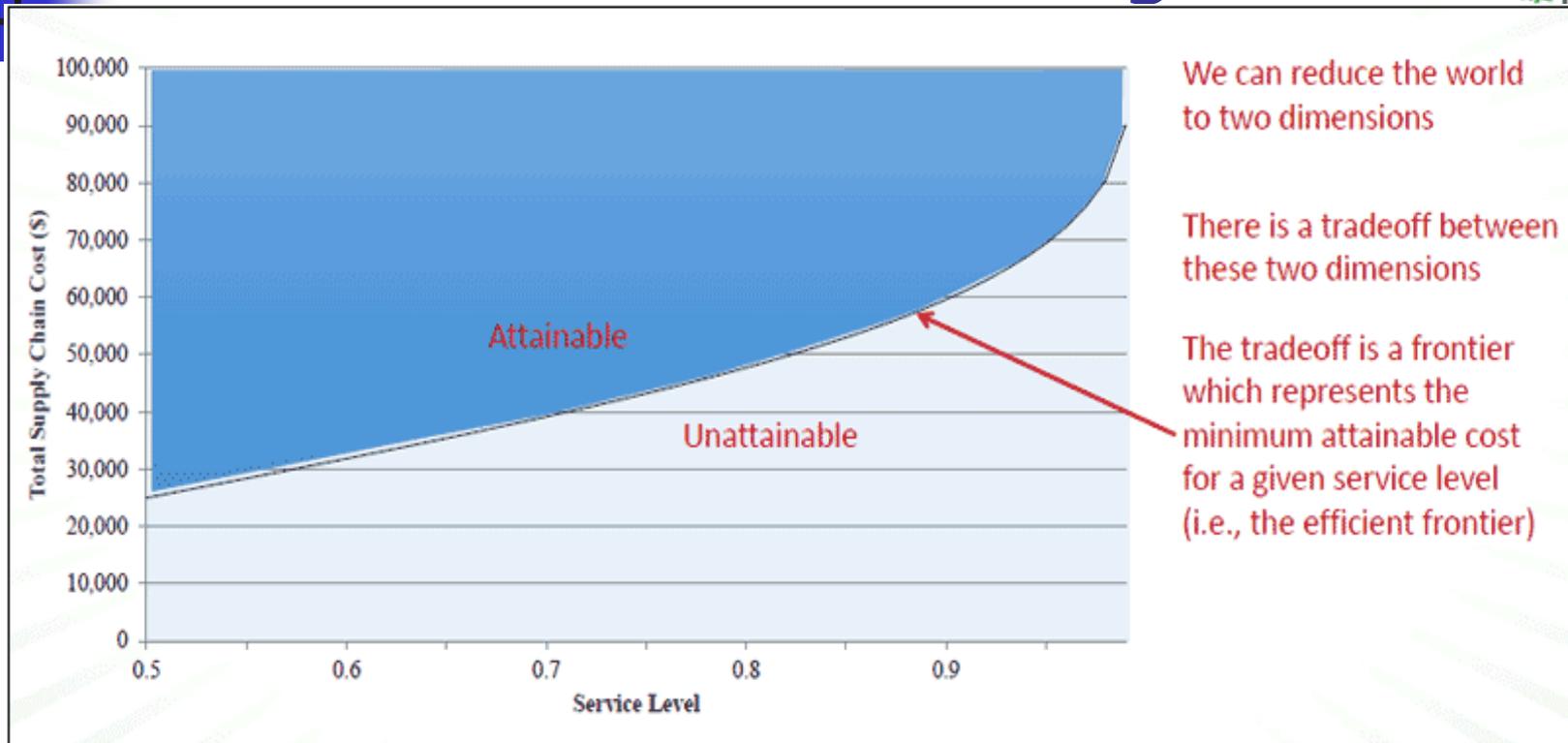
(ASM: Available seat miles; RPM: Revenue passenger mile)

H. R. Alvarez A., Ph.D.

D.



# Curva de eficiencia en logística



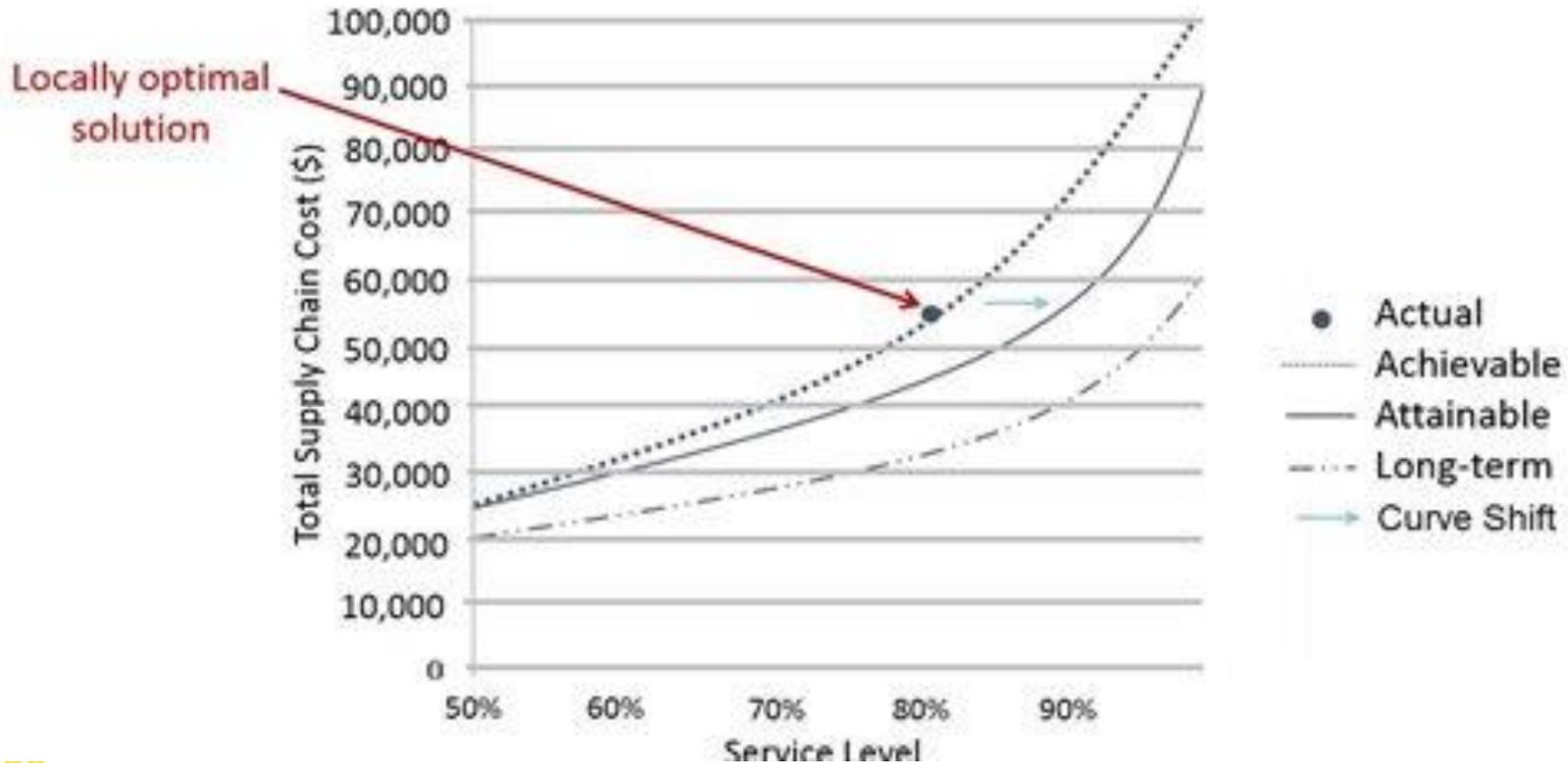
We can reduce the world to two dimensions

There is a tradeoff between these two dimensions

The tradeoff is a frontier which represents the minimum attainable cost for a given service level (i.e., the efficient frontier)



# Cambiando la curva en la frontera de eficiencia



# Ejemplo



- Tres unidades de decisión (DMUs) utilizan dos insumos  $x_1$  y  $x_2$  para producir un producto y tal que:

DMU	$y$	$x_1$	$x_2$
1	15	6	2
2	12	4	5
3	20	10	8

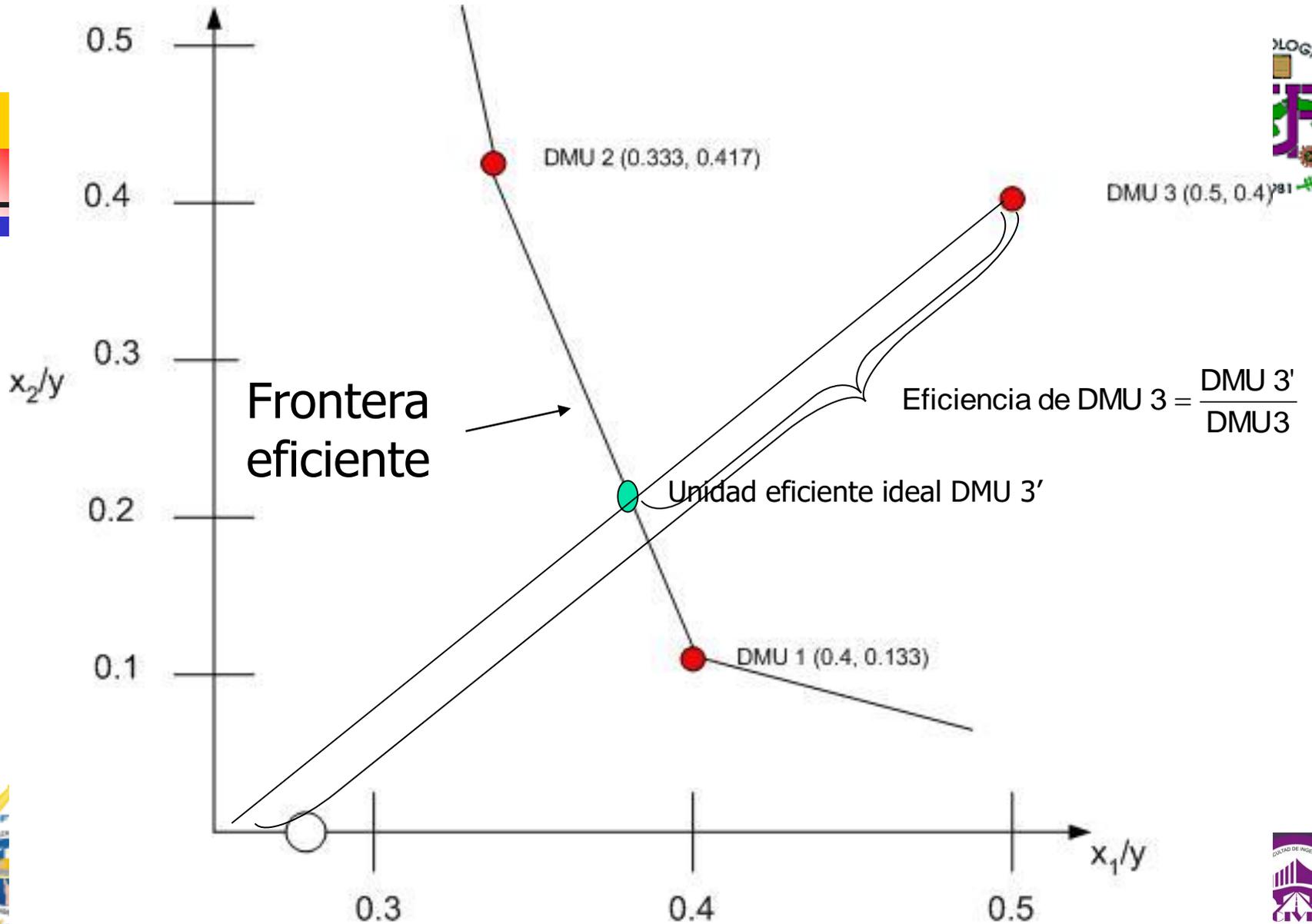
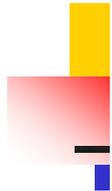


# Niveles normalizados de Insumo



DMU	$x_1/y$	$x_2/y$
1	$6/15 = 0.400$	$2/15 = 0.133$
2	$4/12 = 0.333$	$5/12 = 0.417$
3	$10/20 = 0.500$	$8/20 = 0.400$







# Formulación del DEA

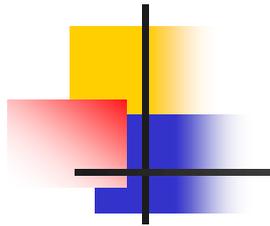
---



- Desarrollada por Charnes, Cooper y Rhodes (1984)
- Enfoque no paramétrico basado en programación fraccionada
- No requiere una función predefinida






$$\max h_o = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{r,0}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{i,0}}$$

s.a.:

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{r,j}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{i,j}} \leq 1 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n; r = 1, 2, \dots, s; i = 1, 2, \dots, m$$

$$y_{r,j}, x_{i,j}, u_r, v_i \geq 0$$



## En la formulación anterior

- $y_{r,j}$  : es la cantidad producida del r-ésimo producto por la j-ésima DMU
- $x_{i,j}$  : es la cantidad de i-ésimo insumo consumido por la j-ésima DMU
- $u_{r,j}$  : es el peso del r-ésimo producto en la función de producción de la j-ésima DMU
- $v_{i,j}$  : es el peso del i-ésimo insumo en la función de producción de la j-ésima unidad
- $j=0$  : Unidad de referencia



## En la formulación

- Los valores de  $x_{i,j}$  y  $y_{r,j}$  son observaciones del pasado
- Los valores de  $u_{r,j}$  y  $v_{i,j}$  son las variables de decisión.
- La formulación anterior es difícil de resolver



# Orientación hacia los insumos

- Una DMU no es eficiente si es posible mantener el nivel de producción a un nivel constante, o aumentarlos, a la vez que se disminuye cualquier insumo, sin aumentar los otros.
- En el dual, el valor de  $p_{0,j}$  será positivo si su correspondiente restricción en el primal define la DMU correspondiente como eficiente.
- El conjunto de DMUs que contengan positivo el  $p_{0,j}$  será el conjunto de referencia para la  $DMU_0$



# Formulación como P. L.



$$\max h_0 = \sum_{r=1}^s u_r y_{r,0}$$

s.a.:

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{i,0} = 1$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{r,j} - \sum_{i=1}^m v_i x_{i,j} \leq 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

$$u_r, v_i \geq 0 \quad \forall r, j$$



# Orientación hacia los productos



- Desarrollada por Bessent y Bessent (1988)
- Bajo este enfoque, una DMU no es eficiente si es posible aumentar el nivel de producción de algún producto sin aumentar ningún insumo y sin disminuir ningún otro producto
- Este enfoque considera las dificultades en asignar recursos
- Presenta una formulación similar al dual



# Formulación general



$$\max z_0$$

$$y_{r,0}z_0 - \sum_{j=1}^n y_{r,j}\delta_j + S_r^+ = 0; \text{ para } r = 1, 2, \dots, s$$

$$\sum_{j=1}^n x_{i,j}\delta_j + S_r^- = x_{i,0}; \text{ para } i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_{i,j}, y_{r,j}, \delta_j, S_r^+, S_r^- \geq 0$$



# Donde:

$z_0$  : Ineficiencia de la unidad. En este caso  
 $h_0=1/z_0$

$\delta_j$  : Es el peso para la DMU  $j$ . Es la  
variable de decisión del problema.

$S_r^+$ ,  
 $S_r^-$  : Variables de holgura de las  
restricciones



# Ejemplo

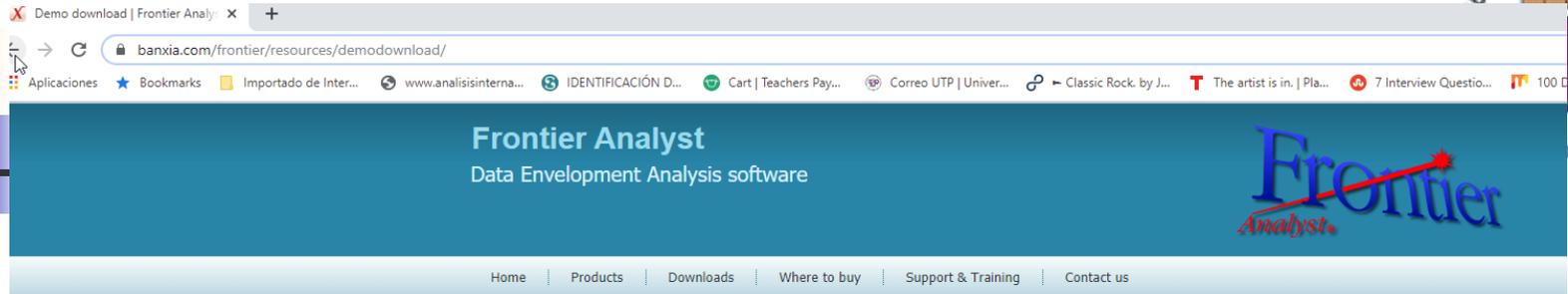


- Tres unidades de decisión (DMUs) utilizan dos insumos  $x_1$  y  $x_2$  para producir un producto y tal que:

DMU	$y$	$x_1$	$x_2$
1	15	6	2
2	12	4	5
3	20	10	8



# https://banxia.com/frontier/resources/demodownload/



## Demo download

You can download free demonstration files from this page.

Quick jump to: ["In use" white paper](#), [Workbook 1](#), [Working demo](#), [Adobe Acrobat](#).

### Frontier Analyst® In Use "White Paper"

#### Acrobat file (PDF):

**Click here to download:**

[Frontier\\_Analyst®\\_In\\_Use](#)

Clicking on the link will usually show you the document in your browser. If you wish to save a copy to disk, right click and select the "Save target as" (or similar) option.

[Download troubles?](#)

#### Information:

The Frontier Analyst® In Use white paper provides an introduction to Frontier Analyst®, its capabilities, and what it can do for you.

### Frontier Analyst® Working Demonstration

#### Installation executable :

**Click here to download:**

[FA4demo.exe](#) (Size is 45M approximately) Select the "Save to disk option" if you have a choice of saving or running directly.

[Download troubles?](#)

#### Information:

The Frontier Analyst® working demonstration is a restricted version of the software. It will allow up to 12 units of your own data to be analysed. It also has some sample models, and a workbook to help you learn the software. Please email [info@banxia.com](mailto:info@banxia.com) if you have any questions.

### Frontier Analyst® Workbook (updated for version 4)

#### Acrobat file (PDF):

**Click here to download:**

[Frontier\\_Analyst®\\_Workbook](#)

Clicking on the link will usually show you the document in your browser. If you wish to save a copy to disk, right click and select the "Save target as" (or similar) option.

[Download troubles?](#)

#### Information:

Frontier Analyst® Workbook gives a step-by-step tutorial in the use of Frontier Analyst®, describing some of its capabilities and how you can use it.

### Free Adobe Acrobat Reader

#### Executable

[Download from Adobe web pages](#)

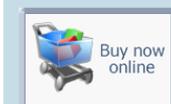
#### Information:

After you have finished downloading from this page, you can download Adobe Acrobat from the [Adobe web pages](#). You can

**BANXIA**  
SOFTWARE

#### Pricing and Downloads

- Pricing and ordering
- Academic pricing
- Enterprise: PowerTrain™
- Network licence manager
- Demo download



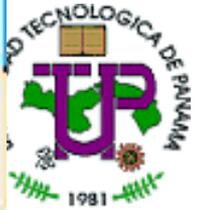
#### Detailed Information

- Frontier Analyst home
- Overview
- Screenshots
- Summary displays
- Data management
- Unit details
- Printed reports
- Project wizard
- Features
- What's new
- Case studies
- Benchmarking team and individual performance in R&D Laboratories
- Data Development



# Frontier Analyst®

BANXIA®  
SOFTWARE



## DEMO



Frontier Analyst Information

Welcome to the  
**Frontier Analyst Demonstration**

This version of the software is the same as the full version, except for the following:

- Only 12 units are supported for your own data testing. Contact us to purchase a trial license if you need more.
- The demonstration projects are restored each time you open them to ensure that they are complete. This means you can edit and modify them knowing they will be restored next time.
- You cannot use the report designer, though the standard reports are available.
- A few of the advanced displays are not available (as indicated when selected).

If you need help on a feature, press F1 at any time, or contact us at Banxia Software (mail to [info@banxia.com](mailto:info@banxia.com) or <http://www.banxia.com>).

[Click here to visit www.banxia.com now!](http://www.banxia.com)

OK

Version 4.3.0 (Build #347)

Copyright 1995-2015 Banxia

Demonstration version

OK



No project - Frontier Analyst (Demonstration)

Home Source data Analysis Results Graph Translation

Clipboard Configuration Information

Copy Paste Export as text... Change install code Check for updates on the web Contents Visit the Frontier Analyst home page About Frontier Analyst... Guide

**Main**

- Data viewer
- Scores
- Unit details
- Group review
- DEA options
- Comparison manager

**Document**

- Diagram tool
- Project notes

**Analysis comparison**

**Analysis**

- Reference frequencies
- X-Y plot
- Efficiency plot
- Frontier plot
- Improvement

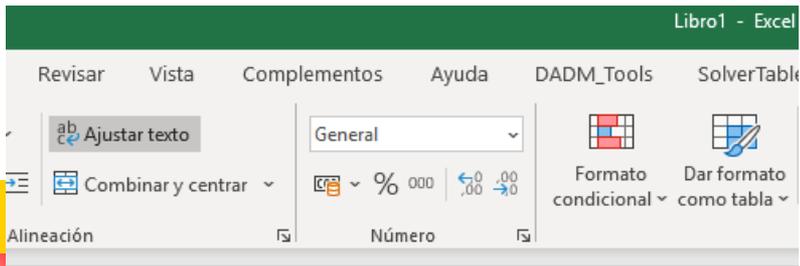
**Welcome to the Frontier Analyst Guide**

To help you get started with analysing your data, this guide has information on the facilities available to you. More advanced options are available in the other windows that are available using the tools on the left or the Results tab of the ribbon.

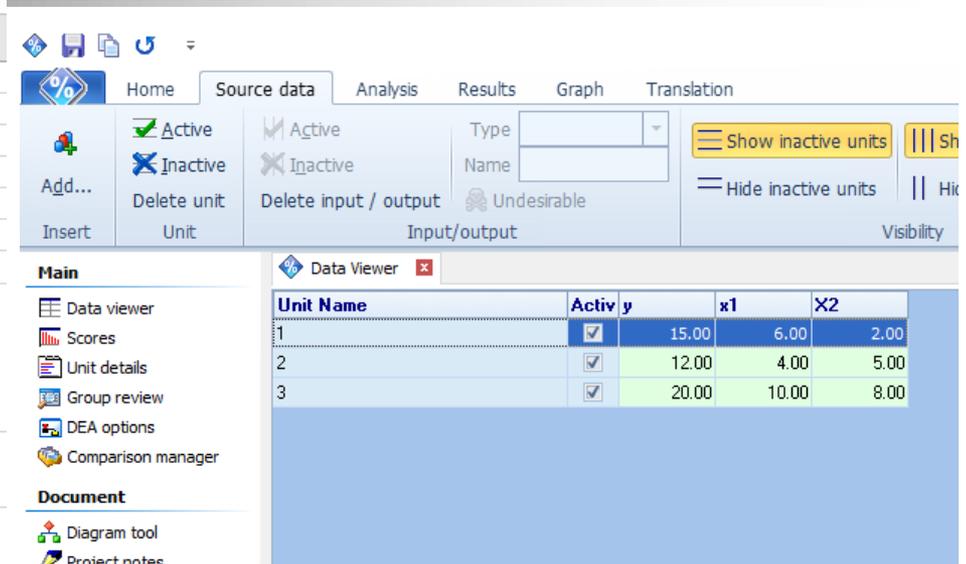
On this page : [Getting started](#) [Using the ribbon toolbar](#)

[Need help with the "ribbon toolbar"? Click here.](#)

Ready Recalc Edited



DMU	y	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>
1	15	6	2
2	12	4	5
3	20	10	8



Home Source data Analysis Results Graph Translation

Copy Show difference info Toggle traffic lights

DEA options Comparison manager Category manager

Table copy Summary Analysis Data layout

Main

- Data viewer
- Scores
- Unit details
- Group review
- DEA options
- Comparison manager

Document

- Diagram tool
- Project notes

Analysis comparison

Data Viewer Efficiency Table

Efficiency scores Summary graph Distribution

Unit name	Units	Score	Efficient	Condition
1		100.0%	✓	●
2		100.0%	✓	●
3		72.6%		●



Comparison Comparison 1

1

100.00% (Comparison 1)

Potential Improvements

Variable	Actual	Target	Potential Improvement
x2	2.00	2.00	0.00 %
x1	6.00	6.00	0.00 %
y	15.00	15.00	0.00 %

100.00% (Comparison 1)

Potential Improvements

Variable	Actual	Target	Potential Improvement
x2	5.00	5.00	0.00 %
x1	4.00	4.00	0.00 %
y	12.00	12.00	0.00 %

72.61% (Comparison 1)

Potential Improvements

Variable	Actual	Target	Potential Improvement
x2	8.00	5.81	-27.39 %
x1	10.00	7.26	-27.39 %
y	20.00	20.00	0.00 %

Comparison Comparison 1

1

100.00% (Comparison 1)

Potential Improvements

Variable	Actual	Target	Potential Improvement
x2	2.00	2.00	0.00 %
x1	6.00	6.00	0.00 %
y	15.00	15.00	0.00 %

100.00% (Comparison 1)

Potential Improvements

Variable	Actual	Target	Potential Improvement
x2	5.00	5.00	0.00 %
x1	4.00	4.00	0.00 %
y	12.00	12.00	0.00 %

72.61% (Comparison 1)

Potential Improvements

Variable	Actual	Target	Potential Improvement
x2	8.00	8.00	0.00 %
x1	10.00	10.00	0.00 %
y	20.00	27.55	37.73 %

# Ejemplo



Planta	Recursos				Ventas (Millones de US\$)
	Motores (Unidades)	Recursos Financieros (Miles de US\$)	Recursos tecnológicos (Miles de US\$)	Otros recursos (Miles de US\$)	
Alemania	400	230	125	200	70
Francia	900	270	200	230	130
Bélgica	200	120	150	230	70
Holanda	500	200	320	420	80

