Procesos estocásticos

Definición

http://humberto-r-alvarez-a.webs.com

Definición de proceso estocástico

- Estudio del comportamiento de una variable aleatoria a lo largo del tiempo
- El ajuste de cualquier modelo teórico que permita hacer pronósticos o predicciones sobre el comportamiento futuro de un proceso.
- Es un concepto matemático que sirve para caracterizar y estudiar todo tipo fenómenos aleatorios (estocásticos) que evolucionan, generalmente, con el tiempo.

Definición formal

- En estadística, y específicamente en la teoría de la probabilidad, un proceso estocástico es un concepto matemático que sirve para caracterizar una sucesión de variables aleatorias (estocásticas) que evolucionan en función de otra variable, generalmente el tiempo.
- Así, consiste en una sucesión de variables aleatorias indexadas por una variable (continua o discreta), generalmente, el tiempo.
- Cada una de las variables aleatorias del proceso tiene su propia función de distribución de probabilidad y, entre ellas, pueden estar correlacionadas o no.

Ejemplos

- Señales de telecomunicación
- Señales biomédicas (electrocardiograma, encefalograma, etc...)
- Señales sísmicas
- El número de manchas solares año tras año
- El índice de la bolsa segundo a segundo
- La evolución de la población de un municipio año tras año
- El tiempo de espera en cola de cada uno de los usuarios que van llegando a una ventanilla
- El clima es un gigantesco cúmulo de procesos estocásticos interrelacionados (velocidad del viento, humedad del aire, temperatura, etc) que evolucionan en el espacio y en el tiempo.

Definición Matemática

- Un proceso estocástico se puede definir equivalentemente de dos formas diferentes:
  - Como un conjunto de realizaciones temporales y un índice aleatorio que selecciona una de ellas.
  - Como un conjunto de variables aleatorias X_t indexadas por un índice t, dado que $t \in T$ con $T \subseteq \Re$, donde X_t forman un espacio probabilístico (Ω, *B*, P), tal que:
    - Ω es un experimento estocástico donde $P(\Omega) = 1$
    - *B* los posibles resultados de Ω y el resultado del evento $E \in B$

Casos especiales de procesos estocásticos

- Proceso estacionario: si la función de distribución conjunta de cualquier subconjunto de variables es invariable respecto a un desplazamiento en el tiempo.
- Proceso homogéneo: variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas
- Proceso de Markov: Aquellos procesos discretos en que la evolución sólo depende del estado actual y no de los anteriores.
- Proceso de Gauss: Proceso continuo en el que toda combinación lineal de variables es una variable de distribución normal.
- Proceso de Poisson
- Proceso de Gauss-Markov: Son procesos, al mismo tiempo, de Gauss y de Markov
- Proceso de Bernoulli: Son procesos discretos con una distribución binomial.

Proceso estacionario

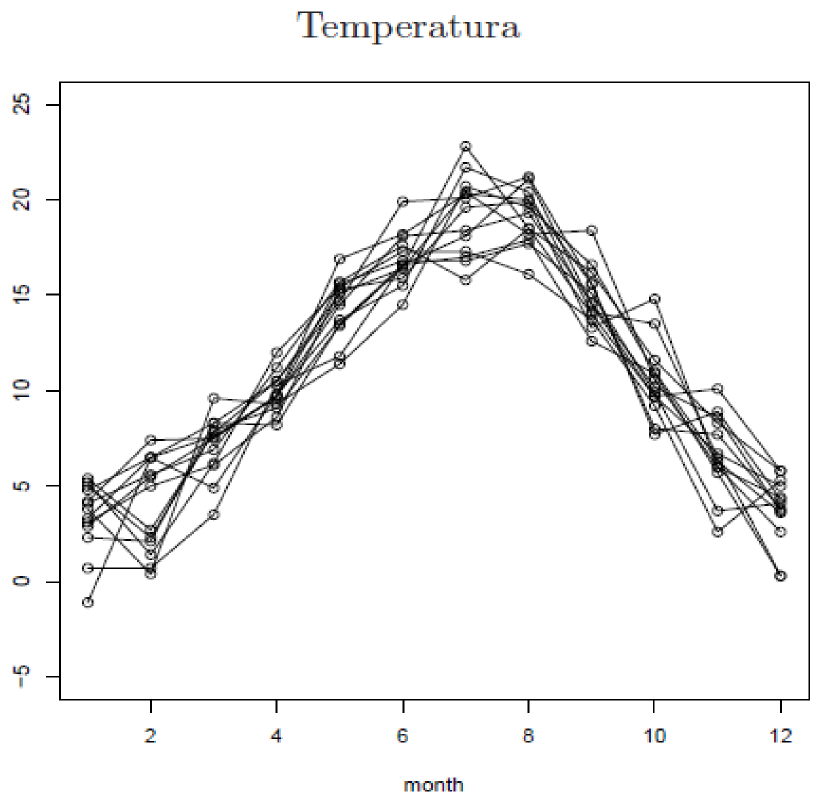
- Es un proceso estocástico cuya distribución de probabilidad en un instante de tiempo fijo o una posición fija es la misma para todos los instantes de tiempo o posiciones.
- En consecuencia, parámetros tales como la media y la varianza, si existen, no varían a lo largo del tiempo o la posición.

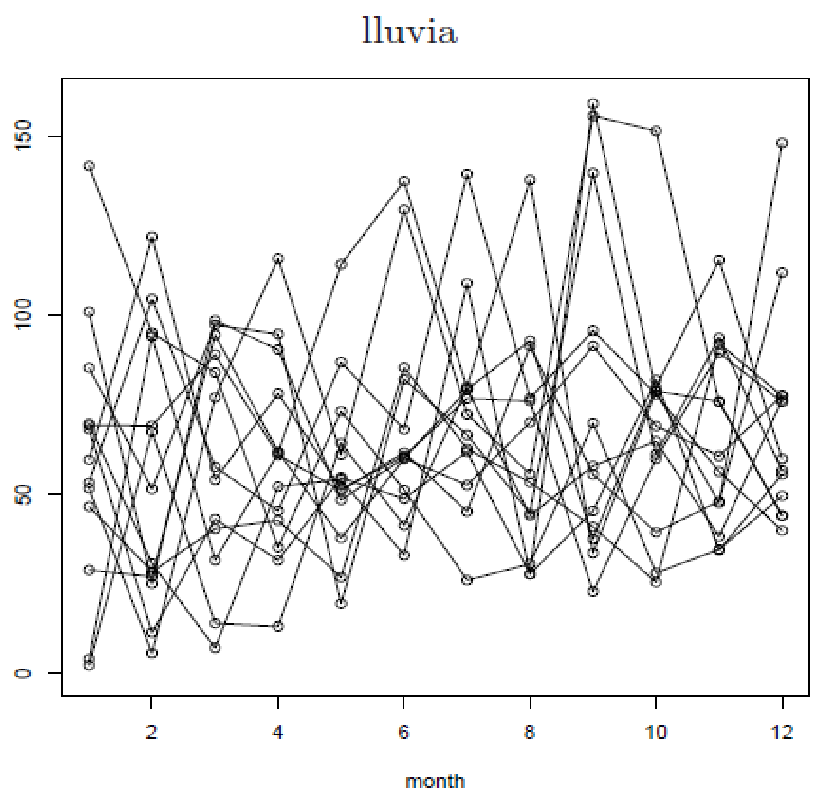
Series temporales

- Una serie temporal describe la evolución aleatoria de una variable en el tiempo.
- Es el modelado de un proceso estocástico en tiempo discreto, donde los elementos de I están ordenados y corresponden a instantes equidistantes del tiempo.
- Si I = {1, . . . , n}, la serie es $y_1, y_2, \ldots, y_n$;
- Si I = N, la serie es $y_0, y_1, y_2, \ldots$,;
- Si I = Z, entonces la serie es $\ldots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2 \ldots$.
- Un caso especial: Un paseo aleatorio se modela mediante la siguiente expresión: $X(t + \tau) = X(t) + \Phi(\tau)$
- donde Φ es la variable aleatoria que describe la ley de probabilidad para tomar el siguiente paso y τ es el intervalo de tiempo entre pasos subsecuentes.

Ejemplo: modelado del clima

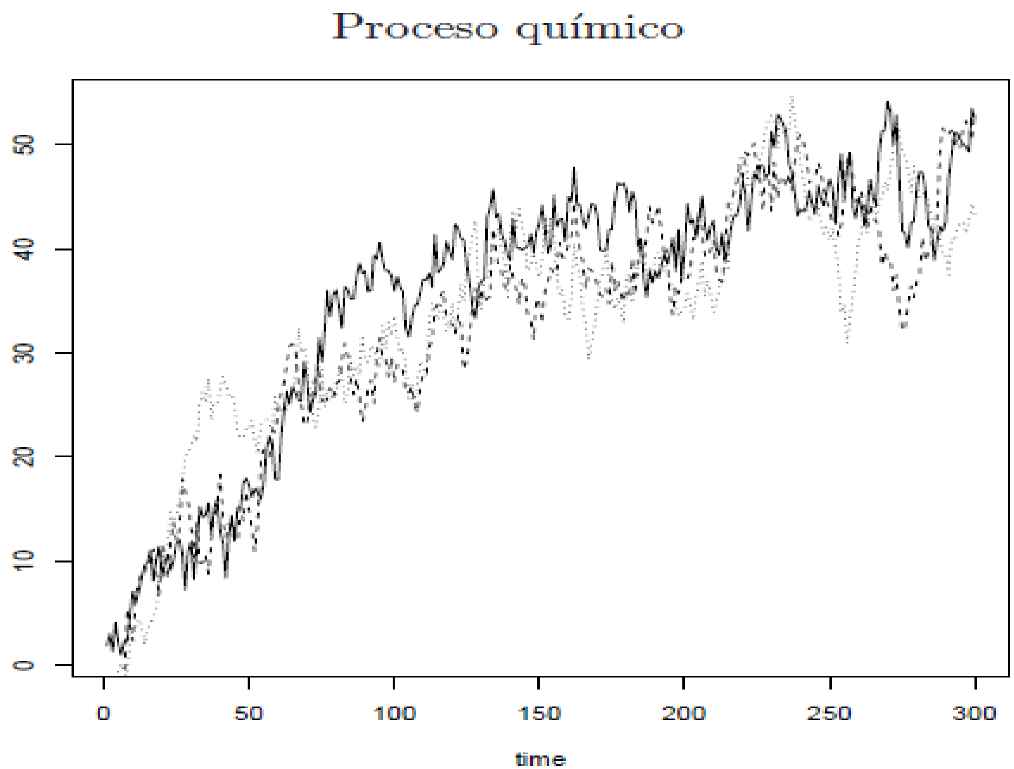
- Se considera la que distribución de la temperatura es la misma en 13 años observados, entonces se tendrá 13 trayectorias del proceso con 12 variables aleatorias cada una, una por mes. Igual puede hacerse lo mismo con la serie de las lluvias.





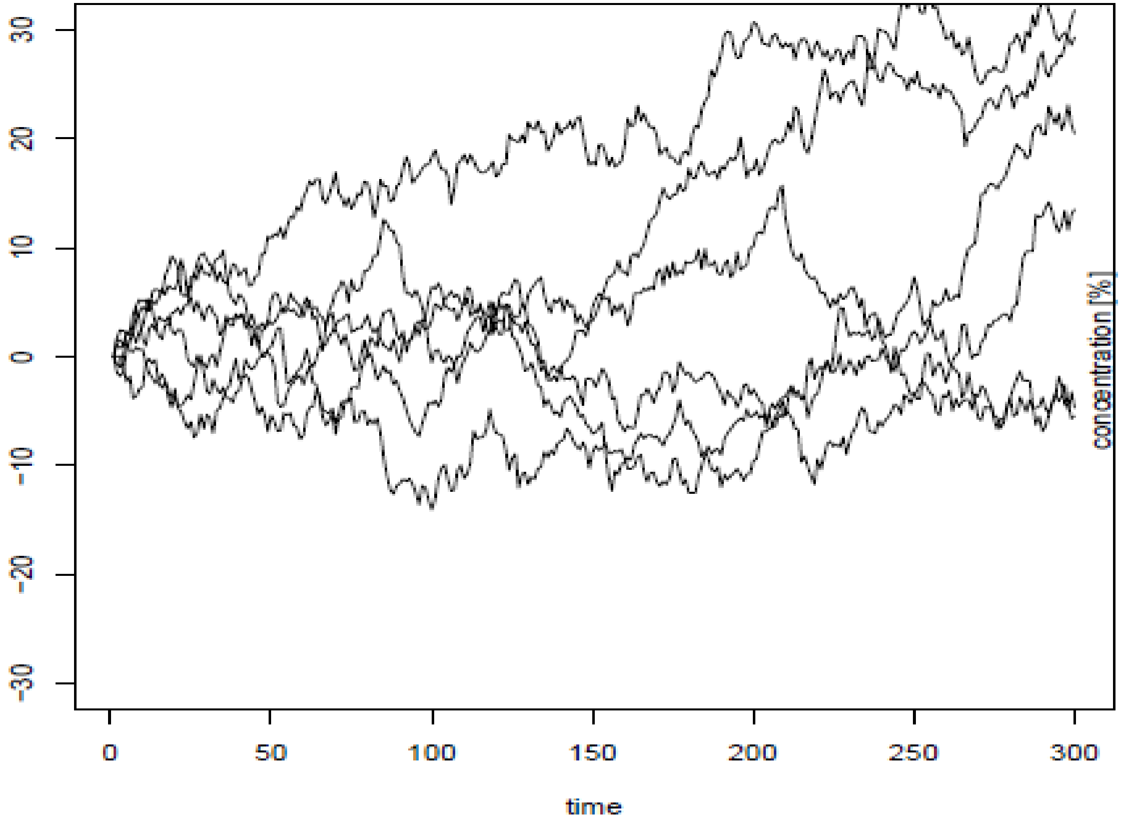
Ejemplo: proceso químico

- La medida de la concentración de una sustancia se toma cada minuto durante 5 horas. Se repite esto en distintos días bajo las mismas condiciones para obtener información sobre la distribución del proceso. Se tendrán varias series de la forma $y_1, \ldots, y_{300}$ provenientes del mismo proceso, una para cada día.

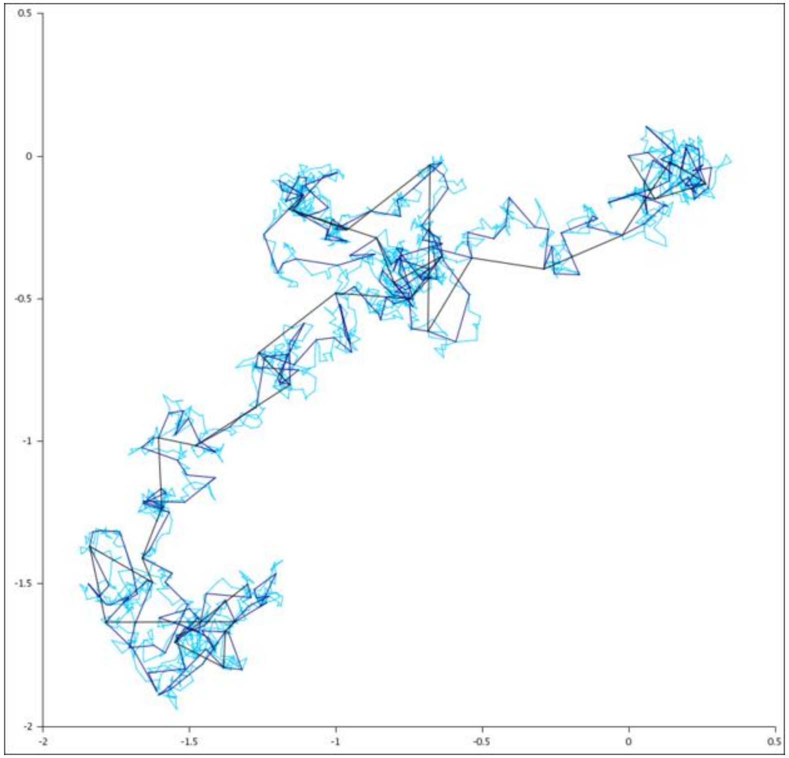


Ejemplo: proceso simulado

- Se han generado seis trayectorias de tamaño T = 300; $y_1, \ldots, y_{300}$, de un paseo aleatorio (Yt) con $\sigma^2 = 1$, se han representado en la figura. Se puede ver que el gráfico de las distintas trayectorias nos da información sobre la distribución de probabilidad del proceso.



Paseo aleatorio bidimensional



Movimiento Browniano