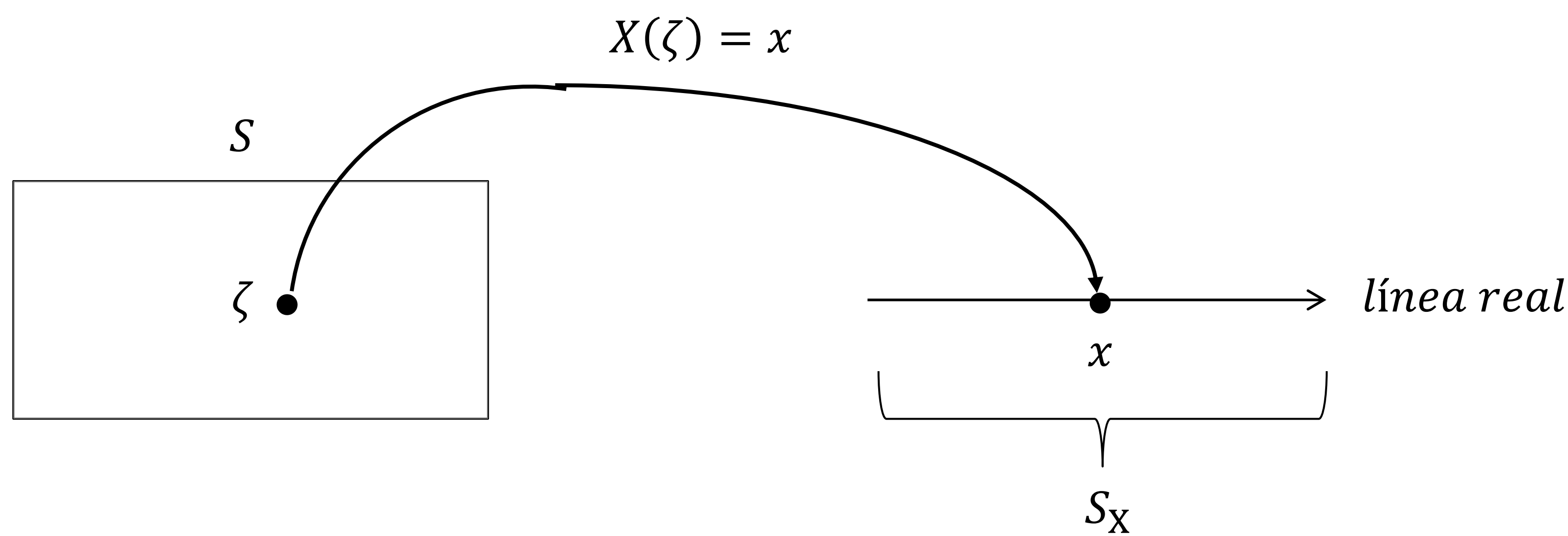
Variables Aleatorias

Por: Dra. Victoria Serrano

Variables Aleatorias

- Una variable aleatoria es una función que asigna un número real $X(\zeta)$ a cada resultado ζ en el espacio muestral S de un experimento aleatorio



Ejemplo

- Una moneda es lanzada tres veces y se registra la secuencia de caras y sellos. El espacio muestral para este experimento es $S = \{CCC, CCS, CSC, SCC, CSS, SCS, SSC, SSS\}$. Sea X el número de caras en tres lanzamientos. X asigna a cada resultado ζ en S un número del conjunto $S_X = \{0,1,2,3\}$. La tabla muestra los ocho resultados de S y su correspondiente valor de X.

ζ	CCC	CCS	CSC	SCC	CSS	SCS	SSC	SSS
$X(\zeta)$	3	2	2	2	1	1	1	0

- X es entonces una variable aleatoria que toma valores en el conjunto $S_X = \{0,1,2,3\}$

Ejemplo

- *Un jugador paga \$1.50 para participar en el siguiente juego: Una moneda es lanzada tres veces y se registra el número de caras* X. *El jugador recibe \$1 si* $X = 2$ *y \$8 si* $X = 3$, *pero nada si tiene otro resultado. Sea* Y *el premio para el jugador.*
- Y es una función de la variable aleatoria X y sus resultados pueden relacionarse al espacio muestral del experimento aleatorio como sigue

ζ	CCC	CCS	CSC	SCC	CSS	SCS	SSC	SSS
$X(\zeta)$	3	2	2	2	1	1	1	0
$Y(\zeta)$	8	1	1	1	0	0	0	0

- Y es entonces una variable aleatoria que toma valores en el conjunto $S_Y = \{0,1,8\}$

Ejemplo…continuación

- Encuentre la probabilidad del evento $\{X = 2\}$
- $P[X = 2] = P\{CCS, CSC, SCC\}$

$$= P\{CCS\} + P\{CSC\} + P\{SCC\}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$

$$= \frac{3}{8}$$

- Encuentre la probabilidad de que el jugador gane \$8

$$P[Y = 8] = P[\{CCC\}] = \frac{1}{8}$$

Variables Aleatorias Discretas

- Asume valores de un conjunto contable
$$S_X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$
- Es finito si su rango es finito
$$S_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$
- Si S_X es discreto, sólo necesitamos obtener las probabilidades para los eventos
$$A_k = \{\zeta : X(\zeta) = x_k\}$$

Función de Masa de Probabilidad (fmp)

$p_X(x) = P[X = x] = P[\{\zeta : X(\zeta) = x\}]$ para un número real x

La fmp $p_X(x)$ satisface tres propiedades:

i. $p_X(x) \geq 0$ para todo x

ii. $\sum_{x \in S_X} p_X(x) = \sum_{todo\ k} p_X(x_k) = \sum_{todo\ k} P[A_k] = 1$

iii. $P[X\ en\ B] = \sum_{x \in B} p_X(x)$ donde $B \subset S_X$

Ejemplo

- Sea X el número de caras en tres lanzamientos independientes de una moneda. Encuentre la fmp de X.

Ejemplo

- Un jugador recibe \$1 si el número de caras en los tres lanzamientos de una moneda es 2, \$8 si el número es 3 y nada en cualquier otro caso. Encuentre la fmp del premio Y.

Ejemplo

- Sea A el evento de interés en un experimento aleatorio donde un dispositivo no es defectuoso. Decimos que un "éxito" ocurre si A ocurre cuando se realiza el experimento. La variable aleatoria Bernoulli I_A es igual a 1 si A ocurre y 0 de otra manera y está dada por la función indicador para A:

$$I_A(\zeta) = \begin{cases} 0 & si\ \zeta\ no\ está\ en\ A \\ 1 & si\ \zeta está\ en\ A \end{cases}$$

Encuentre la fmp de I_A

Ejemplo

- Sea X el número de veces que un mensaje necesita ser transmitido hasta que llega correctamente a su destino. Encuentre la fmp de X. Encuentre la probabilidad de que X sea un número par.

Ejemplo

- Un canal de comunicación binaria introduce un bit de error en una transmisión con una probabilidad p. Sea X el número de errores en n transmisiones independientes. Encuentre la fmp de X. Encuentre la probabilidad de uno o menos errores.

Valor Esperado de una Variable Aleatoria

- Valor esperado o media

$$m_X = E[X] = \sum_{x \in S_X} x p_X(x) = \sum_k x_k p_X(x_k)$$

El valor esperado $E[X]$ está definido si la suma anterior converge absolutamente. Esto es:

$$E[|X|] = \sum_k |x_k| p_X(x_k) < \infty$$

Ejemplo: Media de la variable aleatoria Bernoulli

- Encuentre el valor esperado de la variable aleatoria Bernoulli I_A

Ejemplo

- Sea X el número de caras en los tres lanzamientos de una moneda. Encuentre $E[X]$

Ejemplo

- Sea X el número de bytes en un mensaje y suponga que X tiene una distribución geométrica con parámetro p. Encuentre la media de X

Ejemplo

- Una moneda es lanzada repetidamente hasta que sale “sello”. Si se necesitan X lanzamientos, entonces el casino paga al jugador $Y = 2^X$ dólares. ¿Cuánto debe el jugador estar dispuesto a pagar para jugar este juego?

Valor Esperado de Funciones de Variables Aleatorias

Sea X una variable aleatoria discreta y $Z = g(X)$. El valor esperado de Z está dado por:

$$E[Z] = E[g(X)] = \sum_k g(x_k) p_X(x_k)$$

Ejemplo

- Sea X un voltaje con ruido que está uniformemente distribuído en $S_X = \{-3, -1, +1, +3\}$ con $p_X(k) = \frac{1}{4}$ para k en S_X. Encuentre $E[Z]$ donde $Z = X^2$.

Varianza de una Variable Aleatoria

- Para proveer una medida de la variación alrededor de la media (valor esperado).
- La desviación alrededor de la media puede tomar valores positivos o negativos.
- Nuestro interés es sólo en la magnitud de la variación

$$\sigma_X{}^2 = VAR[X] = E[(X - m_x)^2]$$

$$= \sum_{x \in S_X} (x - m_X)^2 \, p_X(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - m_X)^2 p_X(x_k)$$

Desviación Estándar de la Variable Aleatoria X

$$\sigma_X = STD[X] = VAR[X]^{\frac{1}{2}}$$

Forma alternativa para calcular la varianza:

$$VAR[X] = E[(X - m_x)^2] = E[X^2 - 2m_X X + {m_X}^2]$$
$$= E[X^2] - 2m_X E[X] + {m_X}^2$$
$$= E[X^2] - {m_X}^2$$

$E[X^2]$ es conocido como el segundo momento de X. El $n - \acute{e}simo$ momento de X está definido como $E[X^n]$

Varianza

- Sea $Y = X + c$, entonces la varianza será:

$$VAR[X + c] = E[X + c - (E[X] + c)^2]$$
$$= E[(X - E[X]^2)] = VAR[X]$$

- Agregar una constante a una variable aleatoria no afecta la varianza. Sea $Z = cX$, entonces:

$$VAR[cX] = E[(cX - cE[X])^2]$$
$$= E[c^2(X - E[X])^2]$$
$$= c^2 VAR[X]$$

- Multiplicar una variable aleatoria por c, multiplica la varianza por c^2 y la desviación estándar por $|c|$. Sea $X = c$ una variable aleatoria que es igual a una constante con probabilidad 1, entonces

$$VAR[X] = E[(X - c)^2] = E[0] = 0$$

Función de Distribución Acumulativa (cdf)

- Función de distribución acumulativa (cdf) de una variable aleatoria X está definida como la probabilidad del evento $\{X \leq x\}$:
- $F_X(x) = P[X \leq x]$ para $-\infty < x < +\infty$

Propiedades básicas de cdf

- $0 \leq F_X(x) \leq 1$
- $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
- F_X es una función no-decreciente de x, esto es, si $a < b$, entonces $F_X(a) \leq F_X(b)$
- $F_X(x)$ es continuo desde la derecha, esto es, para $h > 0$, $F_X(b) = \lim_{h \to 0} F_X(b + h) = F_X(b^+)$

Propiedades del cdf para calcular probabilidad de eventos

- $P[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)$
- $P[X = b] = F_X(b) - F_X(b^-)$
- $P[X > x] = 1 - F_X(x)$
- $P[a \leq X \leq b] = P[X = a] + P[a < X \leq b]$

$$= F_X(a) - F_X(a^-) + F_X(b) - F_X(a)$$

$$= F_X(b) - F_X(a^-)$$

Función de densidad de probabilidad

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

La probabilidad de X está en un pequeño intervalo en la región alrededor de x:

$$P[x < X \leq +h] = F_X(x+h) - F_X(x)$$

$$= \frac{F_X(x+h)-F_X(x)}{h} h$$

Si la cdf tiene derivada en x, entonces h se vuelve muy pequeño

$$P[x < X \leq +h] \cong f_X(x)h$$

Propiedades del pdf

- Función no-decreciente

$$f_X(x) \geq 0$$

- Probabilidad de un intervalo [a,b]

$$P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f_X(x)dx$$

- cdf puede ser obtenida al integrar pdf

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

- Condición de normalización para pdf

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt$$

Ejemplo

- Se hace girar una flecha que está sujetada al centro de un tablero circular. Sea θ el ángulo final de la flecha donde $0 < \theta < 2\pi$. La probabilidad de que θ caiga en el subintervalo $(0,2\pi]$ es proporcional a la longitud del subintervalo. La variable aleatoria X está definida por $X(\theta) = \frac{\theta}{2\pi}$. Encuentre cdf y pdf de X

Valor esperado de X

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt$$

El valor esperado existe si la integral converge. Es decir:

$$E[|X|] = \int_{-\infty}^{+\infty} |t| f_X(t) dt < \infty$$

Valor esperado de $Y = g(X)$

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

Varianza y Desviación Estándar

- Varianza

$$VAR[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$$

- Desviación Estándar

$$STD[X] = VAR[X]^{\frac{1}{2}}$$

Distribución Gausiana (normal) de una Variable Aleatoria