Probabilidad

Propiedades de Conjuntos

Propiedades de Conjuntos

- Propiedad conmutativa
  - $A \cap B = B \cap A$ y $A \cup B = B \cup A$
- Propiedad asociativa
  - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ y $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- Propiedad distributiva
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ y
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- Leyes de De Morgan
  - $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ y $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Ejemplo

- Dado el siguiente experimento

$E = determinar\ el\ valor\ de\ una\ señal\ de\ audio\ en\ el\ tiempo\ t_1$

1. Defina los siguientes conjuntos:

    A=la magnitud de v es mayor a 10 voltios.

    B=v es menor que −5 voltios.

    C=v es positivo.

2. Encuentre las siguientes operaciones de conjuntos:

$$A \cup B$$
$$A \cap B$$
$$C^c$$
$$(A \cup B) \cap C$$
$$A \cap B \cap C$$
$$(A \cup B)^c$$

Respuesta

- Dado el siguiente experimento

$E = determinar\ el\ valor\ de\ una\ señal\ de\ audio\ en\ el\ tiempo\ t_1$

1. Defina los siguientes conjuntos:

A={v:|v|>10}

B={v: v<−5}

C={v: v>0}

2. Encuentre las siguientes operaciones de conjuntos:

$$A \cup B = \{v: v < -5\ o\ \ v > 10\}$$

$$A \cap B = \{v: v < -10\}$$

$$C^c = \{v: v \leq 0\}$$

$$(A \cup B) \cap C = \{v: v > 10\}$$

$$A \cap B \cap C = \emptyset$$

$$(A \cup B)^c = \{v: -5 \leq v \leq 10\}$$

¿Qué es probabilidad?

- Cálculo matemático que indica la posibilidad de que un evento ocurra de un experimento al azar.

Axiomas de la Probabilidad

- Axioma I: $0 \leq P[A]$
- Axioma II: $P[A] = 1$
- Axioma III: Si $A \cap B \neq \emptyset$ entonces $P[A \cup B] = P[A] + P[B]$
- Axioma III': Si $A_1, A_2, \ldots$ es una secuencia de eventos de modo que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$, entonces

$$P\left[\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right] = \sum_{k=1}^{\infty} P[A_k]$$

Corolarios

- Corolario 1: $P[A^c] = 1 - P[A]$
- Corolario 2: $P[A] \leq 1$
- Corolario 3: $P[\emptyset] = 0$
- Corolario 4: Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ son conjuntos mutuamente exclusivos, entonces:

$$P\left[\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right] = \sum_{k=1}^{n} P[A_k] \; para \; n \geq 2$$

Corolarios…continuación

- Corolario 5: $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$
- Corolario 6:

$$P\left[\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right] = \sum_{j=1}^{n} P[A_j] - \sum_{j<k} P[A_j \cap A_k] + \cdots$$

$$+(-1)^{n+1} P[A_1 \cap \cdots \cap A_n]$$

- Corolario 7: Si $A \subset B$, entonces $P[A] \leq P[B]$

Ejemplo

Una urna contiene 10 bolas distintas enumeradas del 0 al 9. Se selecciona al azar una bola de la urna. Encuentre la probabilidad de los siguientes eventos:

1. A = la bola seleccionada tiene marcado un número impar
2. B = la bola seleccionada tiene marcado un número múltiplo de 3
3. C = la bola seleccionada tiene marcado un número que es menor a 5
4. $A \cup B$
5. $A \cup B \cup C$

Respuesta

- S = {0,1,…,9}
- A = {1,3,5,7,9}
- B = {3,6,9}
- C = {0,1,2,3,4}

Si asumimos que las bolas tienen la misma probabilidad de ser seleccionadas, entonces:

$$P[A] = P[\{1\}] + P[\{3\}] + P[\{5\}] + P[\{7\}] + P[\{9\}]$$
$$= \frac{5}{10}$$

Respuesta...continuación

- $P[B] = P[\{3\}] + P[\{6\}] + P[\{9\}] = \frac{3}{10}$
- $P[C] = P[\{0\}] + P[\{1\}] + P[\{2\}] + P[\{3\}] + P[\{4\}] = \frac{5}{10}$

Del corolario 5

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = \frac{5}{10} + \frac{3}{10} - \frac{2}{10}$$

$$= \frac{6}{10}$$

Respuesta…continuación

- $P[A \cup B \cup C] = P[A] + P[B] + P[C] - P[A \cap B] - P[A \cap C] - P[B \cap C] + P[A \cap B \cap C]$
$= \frac{5}{10} + \frac{3}{10} + \frac{5}{10} - \frac{2}{10} - \frac{2}{10} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10}$
$= \frac{9}{10}$

Probabilidad utilizando conteo

x_1

		a_1	a_2	$\cdots$	a_{n_1}
	b_1	(a_1, b_1)	(a_2, b_1)	$\cdots$	(a_{n_1}, b_1)
	b_2	(a_1, b_2)	(a_2, b_2)		(a_{n_1}, b_2)
x_2	$\vdots$			$\ddots$	$\vdots$
	b_{n_2}	(a_1, b_{n_2})	(a_2, b_{n_2})	$\cdots$	(a_{n_1}, b_{n_2})

Probabilidad Condicional

- $P[A|\mathrm{B}] = \frac{P[A\cap B]}{P[B]}$ para $P[B] > 0$
- E*jemplo: una bola es seleccionada de una urna que contiene dos bolas negras enumeradas 1 y 2, y dos bolas blancas enumeradas 3 y 4. Asumiendo que los cuatro resultados pueden ser escogidos equitativamente, encuentre:*

$$P[A|B]$$

$$P[A|C]$$

Donde A, B y C son los siguientes eventos:

A = bola negra seleccionada

B = bola par seleccionada

C = el número de la bola es mayor que 2

Ejemplo

- *Una urna contiene dos bolas negras y tres blancas. Dos bolas son seleccionadas al azar de la urna sin ser reemplazadas y la secuencia de los colores es registrada. Encuentre la probabilidad de que ambas bolas sean negras* <u>*(utilice el diagrama de árbol)*</u>

Ejemplo: Sistema de Comunicación Binario

- Muchos sistemas de comunicación se pueden modelar de la siguiente manera. Primero, el usuario envía un 0 o un 1 al sistema y la señal correspondiente es transmitida. Segundo, el receptor toma una decisión acerca de cuál fue la entrada al sistema, basado en la señal recibida. Suponga que el usuario envía 0s con una probabilidad de 1−p y 1s con una probabilidad p, y suponga que el receptor toma decisiones aleatorias de error con probabilidad ϵ. Para $i = 0,1$, suponga que el evento A_i es la entrada i, y B_i corresponde al evento en el que la decisión del receptor fue i. Encuentre las probabilidades

$$P\left[A_i \cap B_j\right] \, para \; i = 0,1 \; y \; j = 0,1$$

Teorema total de la probabilidad

- Utilizando el corolario 4

$$P[A] = P[A \cap B_1] + P[A \cap B_2] + \cdots + P[A \cap B_n]$$

$$P[A] = P[A|B_1]P[B_1] + P[A|B_2]P[B_2] + \cdots + P[A|B_n]P[B_n]$$

Teorema total de la probabilidad

Ejemplo: Una compañía tiene tres máquinas B1, B2 y B3 que hacen resistores de 1 kΩ. Los resistors con 50 Ω de su valor nominal son considerados aceptables. Se ha observado que el 80% de los resistores producidos por B1 y el 90% de los resistores producidos por B2 son aceptables. El porcentaje para la máquina B3 es 60%. Cada hora la máquina B1 produce 3000 resistores, B2 produce 4000 resistores y B3 produce 3000 resistores. Todos los resistores se mezclan de forma aleatoria en una caja y se empacan para envío. ¿Cuál es la probabilidad de que la compañía envíe un resistor aceptable?

Teorema de Bayes

$$P[B_j|A] = \frac{P[A \cap B_j]}{P[A]}$$

$$= \frac{P[A|B_j]P[B_j]}{\sum_{k=1}^{n} P[A|B_k]P[B_k]}$$

Teorema de Bayes

Para el ejemplo anterior, ¿cuál es la probabilidad de que un resistor aceptable venga de la máquina B3?

Ejemplo: Sistema de Comunicación Binario

- En el ejemplo del sistema de comunicación binario, encuentre qué entrada tiene más probabilidad dado que el receptor tiene una salida de 1. Asuma, a priori, que la entrada tiene la misma probabilidad de que sea un 0 o un 1. Utilice el teorema de Bayes

$$A_k = evento\ donde\ la\ entrada\ es\ k\ para\ k = 0{,}1$$

$$B_1 = evento\ donde\ la\ salida\ para\ el\ receptor\ fue\ 1$$

Respuesta: Sistema de Comunicación Binario

$$P[B_1] = P[B_1|A_0]P[A_0] + P[B_1|A_1]P[A_1]$$
$$= \varepsilon\left(\frac{1}{2}\right) + (1-\varepsilon)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Aplicando el teorema de Bayes, podemos obtener las probabilidades a posteriori

$$P[A_0|B_1] = \frac{P[B_1|A_0]P[A_0]}{P[B_1]} = \frac{\varepsilon/2}{1/2} = \varepsilon$$

$$P[A_1|B_1] = \frac{P[B_1|A_1]P[A_1]}{P[B_1]} = \frac{(1-\varepsilon)/2}{1/2} = 1-\varepsilon$$

Si ε es menor que ½, entonces la entrada 1 tiene mejores probabilidades que la entrada 0 cuando se observa un 1 a la salida del canal

Independencia de Eventos

- Dos eventos A y B son independientes si

$$P[A \cap B] = P[A]P[B]$$

e Implica que:

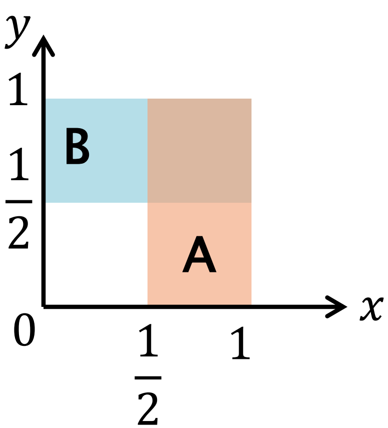
$$P[A|B] = P[A]$$
$$P[B|A] = P[B]$$

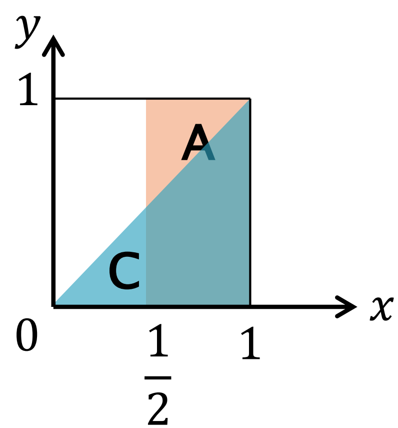
Ejemplo

- Dos números x y y son seleccionados al azar entre cero y uno. Sean los eventos A, B y C definidos de la siguiente manera:

$$A = \{x > 0.5\}, \qquad B = \{y > 0.5\}, \qquad C = \{x > y\}$$

Determine si los eventos A y B son independientes. ¿Son A y C independientes?





Respuesta

- $P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} = P[A]$

- $P[A|C] = \frac{P[A \cap C]}{P[C]} = \frac{3/8}{1/2} = \frac{3}{4} \neq \frac{1}{2} = P[A]$

Ejemplo

En un experimento se elige una carta de una baraja de 52 cartas. Se definen los sucesos A "elegir un rey", B "elegir una jota o una reina" y C "elegir una carta de corazones". Determine si los siguientes eventos son independientes:

A y B

B y C

A y C

Experimentos Secuenciales

- Secuencia de sub-experimentos más simples
- Pueden ser o no independientes
- Ejemplo: *Suponga que 10 números son seleccionados al azar en el intervalo [0,1]. Encuentre la probabilidad de los primeros 5 números sean menores que ¼ y los últimos 5 números sean mayores que ½ .*

Problemas

1. Un dado es lanzado y se registran el número de puntos de la parte superior del dado.
   a. Encuentre la probabilidad del evento de cada elemento del dado bajo la suposición de que todas las caras del dado tienen la misma probabilidad de quedar en la parte superior luego de un lanzamiento.
   b. Encuentre la probabilidad de los eventos A={más de 3 puntos}; B={número impar de puntos}
   c. Encuentre la probabilidad de $A \cup B$, $A \cap B$, A^c

Problemas

2. Un número es seleccionado al azar en el intervalo [−1,2]. Sea los eventos $A = \{x < 0\}$, $B = \{|x - 0.5| < 0.5\}$, y $C = \{x > 0.75\}$
   a. Encuentre las probabilidades de A, B, $A \cap B$, y $A \cap C$
   b. Encuentre las probabilidades de $A \cup B$, $A \cup C$, y $A \cup B \cup C$, primero evaluando directamente los conjuntos y luego sus probabilidades, y segundo, usando los axiomas apropiados o corolarios

Problemas

- Encuentre $P[A\backslash \mathrm{B}]$ si $A \cap B = \emptyset$; si $A \subset B$; si $\mathrm{B} \subset A$
- Demuestre que si $P[A\backslash \mathrm{B}] > \mathrm{P[A]}$, entonces $P[B\backslash \mathrm{A}] > \mathrm{P[B]}$

Problemas

- Sea $S = \{1,2,3,4\}$, $A = \{1,2\}$, $B = \{1,3\}$, $C = \{1,4\}$. Asuma que los resultados son equiprobables. ¿Son A, B y C eventos independientes?