Dos Variables Aleatorias

Por: Dra. Victoria Serrano

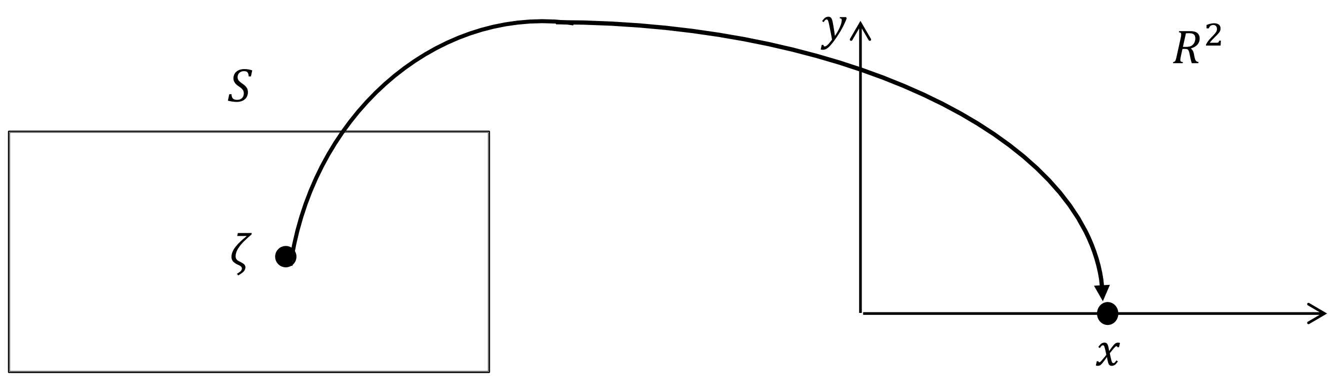
Introducción

- En algunos experimentos, un número de cantidades diferentes son medidas.
- Ejemplos:
  - Señales de voltaje en varios puntos de un circuito en un tiempo específico.
  - Medidas repetidas de cierta cantidad (muestreo) de la amplitud de una señal de audio o video que varía con el tiempo.

Dos Variables Aleatorias

- Una función asigna un par de números reales $X(\zeta)$, $Y(\zeta)$ a cada resultado ζ en el espacio muestral S

$$\boldsymbol{X}(\zeta) = (X(\zeta), Y(\zeta))$$



Ejemplo

- Un experimento aleatorio consiste en seleccionar el nombre de un estudiante de una urna. Sea ζ el resultado de este experiemento. Defina las siguientes dos funciones:

$$H(\zeta) = \text{altura del estudiante } \zeta \textit{ en centímetros}$$

$$\mathrm{W}(\zeta) = \text{peso del estudiante } \zeta \textit{ en kilogramos}$$

Describa el evento B que representa los estudiantes con altura menor o igual a 183 cm y peso menor o igual a 82 kg.

Función de Masa de Probabilidad (fmp) Conjunta

- Especifica las probabilidades del evento $\{X = x\} \cap \{Y = y\}$:

$$p_{X,Y}(x,y) = P[\{X = x\} \cap \{Y = y\}]$$
$$\triangleq P[X = x, Y = y] \; para \; (x,y) \in R^2$$

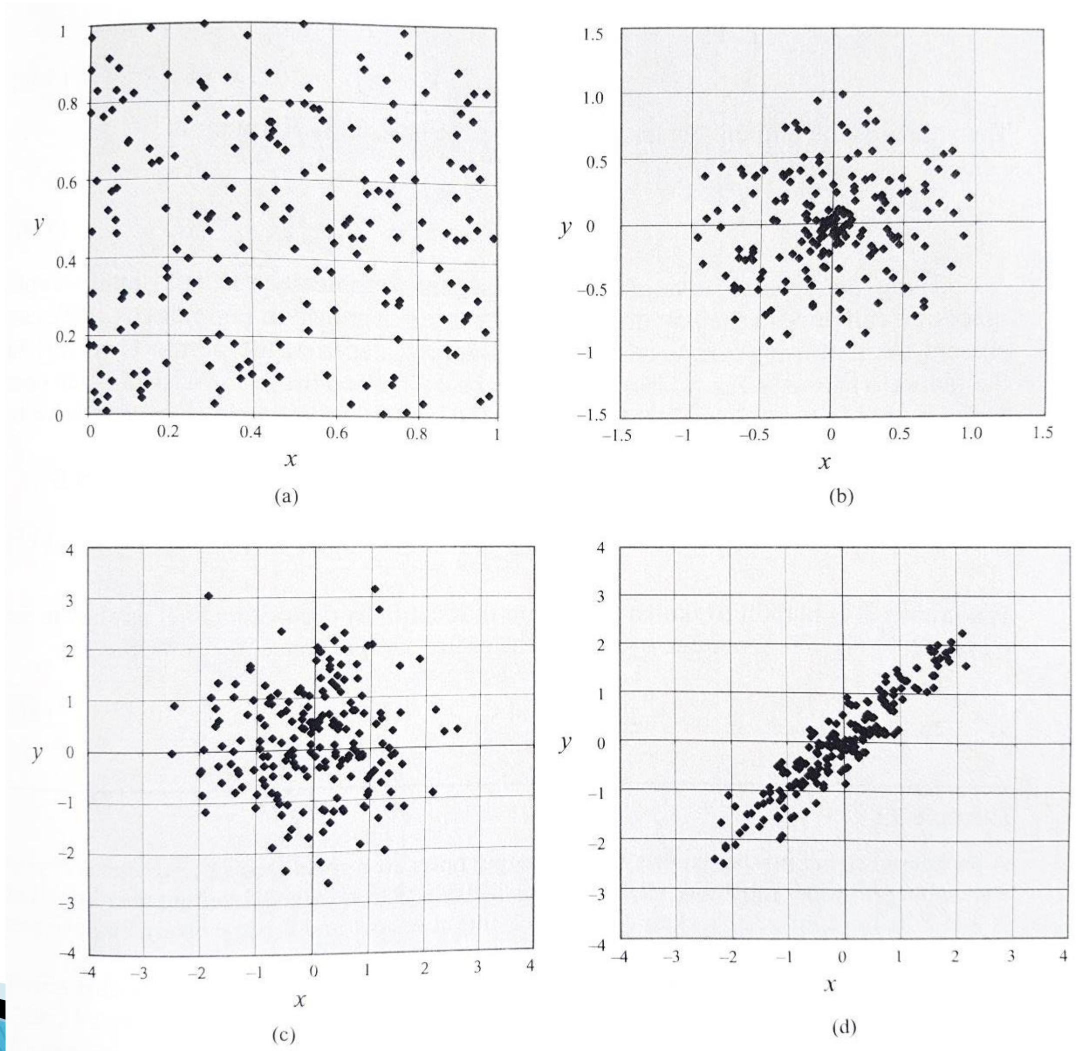
En términos generales,

$$p_{X,Y}(x_j, y_k) = P\left[\{X = x_j\} \cap \{Y = y_k\}\right]$$
$$\triangleq P\left[X = x_j, Y = y_k\right] para \; (x_j, y_k) \in S_{X,Y}$$

Cuando un evento “B” es el espacio muestral completo $S_{X,Y}$, entonces:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} p_{X,Y}(x_j, y_k) = 1$$

Aplicación de dos variables aleatorias



Ejemplo

- Una red de comunicación de paquetes tiene dos puertos de entrada y dos de salida. En un tiempo específico, un paquete llega a cada puerto de entrada con una probabilidad de ½ y tiene la misma probabilidad de ser destinada al puerto 1 o 2. Sea X e Y el número de paquetes destinados para el puerto 1 y 2, respectivamente. Encuentre la pmf de X e Y y muestre la pmf gráficamente.

Función Masa de Probabilidad Marginal

$$p_X(x_j) = P[X = x_j]$$
$$= P[X = x_j, Y = cualquier\ resultado]$$
$$= P[\{X = x_j\ e\ Y = y_1\} \cup \{X = x_j\ e\ Y = y_2\} \cup \cdots]$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} p_{X,Y}(x_j, y_k)$$

De modo similar:

$$p_Y(y_k) = P[Y = y_k]$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} p_{X,Y}(x_j, y_k)$$

La CDF conjunta de X e Y

$$F_{X,Y}(x_1, y_1) = P[X \leq x_1, Y \leq y_1]$$

Satisface las siguientes propiedades:

1. Es una función no-decreciente de x e y.

$F_{X,Y}(x_1, y_1) \leq F_{X,Y}(x_2, y_2)$ si $x_1 \leq x_2$ y $y_1 \leq y_2$

2. $F_{X,Y}(x_1, \infty) = 0$, $F_{X,Y}(-\infty, y_1) = 0$,$F_{X,Y}(\infty, \infty) = 1$
3. La función de distribución marginal acumulativa se obtiene:

$F_X(x_1) = F_{X,Y}(x_1, \infty)$ y $F_Y(y_1) = F_{X,Y}(\infty, y_1)$

La CDF conjunta de X e Y

4. La CDF conjunta es continua desde el "norte" y desde el "este":

$$\lim_{x \to a^+} F_{X,Y}(x, y) = F_{X,Y}(a, y)$$
$$\lim_{y \to b^+} F_{X,Y}(x, y) = F_{X,Y}(x, b)$$

5. La probabilidad del rectángulo $\{x_1 < x \leq x_2, y_1 < y \leq y_2\}$ está dada por: $P[x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2] = F_{X,Y}(x_2, y_2) - F_{X,Y}(x_2, y_1) - F_{X,Y}(x_1, y_2) + F_{X,Y}(x_1, y_1)$

Independencia de dos variables aleatorias

- Si X e Y son variables aleatorias discretas independientes, entonces la función masa de probabilidad conjunta es igual al producto de la función de masa de probabilidad marginal

$$\begin{aligned} p_{X,Y}(x_j, y_k) &= P[X = x_j, Y = y_k] \\ &= P[X = x_j]P[Y = y_k] \\ &= p_X(x_j)p_Y(y_k) \end{aligned}$$

Valor Esperado

- El valor esperado de $Z = g(X,Y)$ se puede encontrar como:

$$E[Z] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy & X,Y\,continua \\ \sum_{i}\sum_{n} g(x_i,y_n) p_{X,Y}(x_i,y_n) & X,Y\ discreto \end{cases}$$

Valor esperado de la suma de n variables aleatorias:

$$E[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_n]$$