

Dos Variables Aleatorias– Parte II

Por: Dra. Victoria Serrano



Función de Densidad de Probabilidad (fdp) Conjunta

- ▶ La fdp conjunta de las variables aleatorias continuas X e Y es una función:

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(u, v) dv du$$

Dado $F_{X,Y}(x, y)$, la definición anterior implica que $f_{X,Y}(x, y)$ es la derivada de la cdf.

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Función de Densidad de Probabilidad (fdp) Conjunta

- ▶ Para una sola variable aleatoria X , la fdp $f_X(x)$ es una medida de la probabilidad por unidad de longitud
- ▶ Para dos variables aleatorias X e Y , la fdp conjunta $f_{X,Y}(x, y)$ mide la probabilidad por unidad de área.

$$P[x < X \leq x + dx, y < Y \leq y + dy] = f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

Dado $F_{X,Y}(x, y)$, la definición anterior implica que $f_{X,Y}(x, y)$ es la derivada de la cdf.

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Ejemplo

- ▶ Utilice la cdf conjunta del ejemplo para las edades de los niños X e Y para derivar la fdp conjunta

Propiedades de la fdp conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) \geq 0 \text{ para todo } (x, y)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx dy = 1$$

La probabilidad de que las variables aleatorias continuas (X, Y) estén en A es:

$$P[A] = \int \int_A f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

Ejemplo

- ▶ Las variables aleatorias X e Y tienen la fdp conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c, & 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 3 \\ 0, & \text{de cualquier otro modo} \end{cases}$$

Encuentre:

1. La constante c
2. $P[A] = P[2 \leq X \leq 3, 1 \leq Y < 3]$
3. $P[A] = P[Y > X]$

Ejemplo

- ▶ Encuentre la cdf conjunta $F_{X,Y}(x, y)$ cuando X e Y tienen una fdp conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2, & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{de cualquier otro modo} \end{cases}$$

fdp marginal

- ▶ Si X e Y son variables aleatorias con fdp conjunta $f_{X,Y}(x, y)$,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx$$

Ejemplo

- ▶ La fdp conjunta de X e Y es

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{5y}{4}, & -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{de cualquier otro modo} \end{cases}$$

Encuentre las fdp marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$

Variables Aleatorias Continuas Independientes

- ▶ Las variables aleatorias X e Y son independientes sí y solo sí los eventos $\{X = x\}$ y $\{Y = y\}$ son independientes para todo x, y en $S_{X,Y}$.
- ▶ Las variables aleatorias continuas X e Y son independientes sí y solo sí

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Ejemplo

- ▶ En el problema de la edad de los niños, determine si X e Y son independientes.